

Nome Completo: _____

Instruções: A prova vale 10 pontos e tem duração de 1h45min.

Não é permitido sair da sala durante a prova nem o uso de qualquer material eletrônico.

A resolução da prova deve ser realizada na(s) folha(s) de papel anexa(s) e cada resposta deverá ter devidamente identificado o número da questão à qual se refere.

As respostas sem uma justificativa correta serão desconsideradas.

1. **(2,0pts)** Estude a convergência das seguintes integrais:

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$, com $\alpha > 0$

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

2. **(1,5pts)** Considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^4 + 2y^4}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

A função f é contínua em $(0,0)$? E é derivável em $(0,0)$?

3. **(2,5pts)** Seja $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

(a) Determine a equação da curva de nível \mathcal{C} que passa pelo ponto $(1, 1)$ e escreva a equação da reta tangente à curva de nível \mathcal{C} .

(b) Escreva a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

(c) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, 1)$ na direção $\vec{u} = (1, -1)$. A direção \vec{u} é a direção de maior crescimento da função no ponto $(1, 1)$?

4. **(2,0pts)** Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } y \geq 0\}$. Calcule a integral $\iint_R \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy$, usando coordenadas polares.

5. **(2,0pts)** Mostre que o volume de uma esfera de raio r é igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$.