

Nome Completo: _____

Instruções: A prova vale 10 pontos e tem duração de 1h50min.

Não é permitido sair da sala durante a prova nem o uso de qualquer material eletrônico.

A resolução da prova deve ser realizada na(s) folha(s) de papel anexa(s) e cada resposta deverá ter devidamente identificado o número da questão à qual se refere.

As respostas sem uma justificativa correta serão desconsideradas.

1. **(3,0 pts)** Considere uma função real f , definida em \mathbb{R}^2 e tal que, para $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = 1 + xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

- (a) Se f for contínua na origem, qual será o valor de $f(0, 0)$? Justifique.
(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(a, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, 0)$, onde a é um número real (para o caso $a = 0$, suponha $f(0, 0) = 1$).

2. **(3,0 pts)** Considere a função $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{x^2 - y^2}$.

- (a) Determine analítica e geometricamente a curva de nível zero de f .
(b) Justifique que existe plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, 0)$ e escreva uma equação desse plano.
(c) Determine as direções, segundo as quais a taxa de variação de f em $(1, 1)$ é nula.

3. **(2,0 pts)** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e consideremos a função vetorial $F(x, y) = (u, v)$, onde $u = f(x)$ e $v = -y + xf(x)$. Supondo que $f'(x_0) \neq 0$, mostre que F é invertível numa vizinhança do ponto (x_0, y_0) .

4. **(2,0 pts)** Sejam $F(x, y, z) = (x^2 \sin(yz), xz^2, y + z)$ e $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função C^1 tal que $G(2, 3) = (1, 0, 1)$ e

$$DG(2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Determine a melhor aproximação afim da função $H = F \circ G$ numa vizinhança de $(2, 3)$.