Lista 4 de EDO
2^o semestre de 2013
Prof. Rodrigo Salomão

Soluções de edo's em torno de
pontos ordinários
pontos singulares

1. Resolva as edo's em séries de potências em torno do ponto x_0 dado. Encontre a relação de recorrência, os quatro primeiros termos de cada uma das soluções linearmente independentes e, se possível, encontre o termo geral de cada solução.

   (a) $y'' - y = 0$, $x_0 = 0$;
   (b) $y'' - xy' - y = 0$, $x_0 = 0$;
   (c) $y'' - xy' - y = 0$, $x_0 = 1$;
   (d) $(1-x)y'' + y = 0$, $x_0 = 0$;
   (e) $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0$, $x_0 = 0$;

2. Encontre os quatro primeiros termos não-nulos do problema de valor inicial.

   (a) $y'' - xy' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
   (b) $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$;

3. Determine $f^{(2)}(x_0)$, $f^{(3)}(x_0)$ e $f^{(4)}(x_0)$ para o ponto x_0 dado, onde $f(x)$ é uma solução do problema do valor inicial.

   (a) $y'' + xy' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
   (b) $y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (\cos x)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
   (c) $x^2y'' + (1+x)y' + (\ln x)y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$;

4. Determine um mínimo para o raio de convergência da solução em série, em torno do x_0 dado, das seguintes edo's.

   (a) $y'' + 4y' + 6xy = 0$, $x_0 = 0$, $x_0 = 4$;
   (b) $(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0$, $x_0 = 4$, $x_0 = -4$, $x_0 = 0$;

5. Determinar todos os pontos singulares das edo's abaixo e verificar se cada um deles é regular ou irregular.

   (a) $xy'' + (1-x)y' + xy = 0;$
   (b) $x^2(1-x)^2y'' + 2xy' + 4y = 0;$
   (c) $x^2y'' + 2(e^x - 1)y' + (e^{-x}\cos x)y = 0;$
   (d) $(x\,\mathrm{sen}x)y'' + 3y' + xy = 0;$

6. Verifique que cada uma das edo's abaixo tem um ponto singular em $x = 0$. Determinar a equação característica/indicial, a relação de recorrência e as raízes da equação característica. Encontre a solução em série correspondente à maior raiz. Encontre a solução em série correspondente à menor raiz, caso as raízes sejam distintas e não diferirem por um número inteiro.

   (a) $2xy'' + y' + xy = 0;$
   (b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0;$
   (c) $xy'' + y = 0;$
   (d) $xy'' + y' - y = 0;$

7. Encontre todos os pontos singular regulares das edo's abaixo. Determinar a equação característica/indicial e suas raízes em cada ponto singular regular.

   (a) $xy'' + 2xy' + 6e^xy = 0;$
   (b) $x^2y'' - x(2+x)y' + (2+x^2)y = 0;$
   (c) $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0;$
   (d) $x^2y'' + (3\,\mathrm{sen}x)y' - 2y = 0;$

8. Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular de cada uma das edo's abaixo. Determine a equação característica/indicial e suas raízes, para o ponto singular regular $x = 0$, e determine os três primeiros termos diferentes de zero nas duas soluções linearmente independentes na vizinhança de $x = 0$.

   (a) $xy'' + y' - y = 0;$
   (b) $xy'' + 2xy' + 6e^xy = 0;$

(c) $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$;

Respostas

1. (a) $a_{n+2} = a_n/(n+2)(n+1)$, $y_1(x) = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

   $y_2(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

   (b) $a_{n+2} = a_n/(n+2)$, $y_1(x) = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$,

   $y_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\cdot 5} + \frac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$;

   (c) $(n+2)a_{n+2}-a_{n+1}-a_n = 0$, $y_1(x) = 1+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{6}+\cdots$,
   $y_2(x) = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{2} + \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$;

   (d) $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_{n+1} + a_n = 0$, $n \geq 1$, $a_2 = -a_0/2$,
   $y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \cdots$, $y_2(x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{24} + \cdots$;

   (e) $a_{n+2} = -(n^2-2n+4)a_n/(2(n+1)(n+2))$, $n \geq 2$, $a_2 = -a_0$, $a_3 = -a_1/4$, $y_1(x) = 1-x^2+\frac{x^4}{6}-\frac{x^6}{30}+\cdots$, $y_2(x) = x-\frac{x^3}{4}+\frac{7x^5}{160}-\frac{19x^7}{1920}+\cdots$;

2. (a) $y(x) = 2 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$;

   (b) $y(x) = -1 + 3x + x^2 + \frac{3x^3}{4} - \frac{x^4}{6} + \cdots$;

3. (a) $f^{(2)}(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 3$;

   (b) $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -2$, $f^{(4)}(0) = 0$;

   (c) $f^{(2)}(1) = 0$, $f^{(3)}(1) = -6$, $f^{(4)}(1) = 42$;

4. (a) $R = \infty$, $R = \infty$;

   (b) $R = 1$, $R = 3$, $R = 1$.

5. (a) $x = 0$, regular;

   (b) $x = 0$, regular, $x = 1$, irregular;

   (c) $x = 0$, regular;

   (d) $x = 0$, irregular, $x = \pm n\pi$, regular;

6. (a) $r(2r-1)=0$, $a_n=-a_{n-2}/(n+r)[2(n+r)-1]$, $r_1=1/2$, $r_2=0$,
$y_1(x)=x^{1/2}\left[1-\frac{x^2}{2\cdot 5}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9\cdot 13}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! 5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1)}+\cdots\right]$,
$y_2(x)=1-\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 7\cdot 11}+\cdots\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! 3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)}+\cdots$;

(b) $r^2-1/9=0$, $a_n=-a_{n-2}/[(n+r)^2-1/9]$, $r_1=1/3$, $r_2=-1/3$,
$y_1(x)=x^{1/3}\left[1-\frac{1}{1!(1+\frac{1}{3})}(\frac{x}{2})^2+\frac{1}{2!(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})}(\frac{x}{2})^4+\cdots+\frac{(-1)^m}{m!(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})\cdots(m+\frac{1}{3})}(\frac{x}{2})^{2m}+\cdots\right]$,
$y_2(x)=x^{-1/3}\left[1-\frac{1}{1!(1-\frac{1}{3})}(\frac{x}{2})^2+\frac{1}{2!(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})}(\frac{x}{2})^4+\cdots+\frac{(-1)^m}{m!(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})\cdots(m-\frac{1}{3})}(\frac{x}{2})^{2m}+\cdots\right]$;

(c) $r(r-1)=0$, $a_n=a_{n-1}/(n+r)(n+r-1)$, $r_1=1$, $r_2=0$,
$y_1(x)=x\left[1+\frac{x}{1!2!}+\frac{x^2}{2!3!}+\cdots\frac{(-1)^n x^n}{n!(n+1)!}+\cdots\right]$;

(d) $r^2=0$, $a_n=a_{n-1}/(n+r)^2$, $r_1=r_2=0$,
$y_1(x)=1+\frac{x}{(1!)^2}+\frac{x^2}{(2!)^2}+\cdots\frac{x^n}{(n!)^2}+\cdots$;

7. (a) $x=0$, $r(r-1)=0$, $r_1=1$, $r_2=0$;

(b) $x=0$, $r^2-3r+2=0$, $r_1=2$, $r_2=1$;

(c) $x=0$, $r(r-1)=0$, $r_1=1$, $r_2=0$;

(d) $x=0$, $r^2+2r-2=0$, $r_1=-1+\sqrt{3}$, $r_2=-1-\sqrt{3}$;

8. (a) $r_1=0$, $r_2=0$, $y_1(x)=1+x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{36}+\cdots$, $y_2(x)=y_1(x)\ln x-2x-\frac{3x^2}{4}-\frac{11x^3}{108}+\cdots$;

(b) $r_1=1$, $r_2=0$, $y_1(x)=x-4x^2+\frac{17x^3}{3}-\frac{47x^4}{12}+\cdots$, $y_2(x)=-6y_1(x)\ln x+1-33x^2+\frac{449x^3}{6}+\cdots$;

(c) $r_1=0$, $r_2=0$, $y_1(x)=x+\frac{3x^2}{2}+\frac{9x^3}{4}+\frac{51x^4}{16}+\cdots$, $y_2(x)=3y_1(x)\ln x+1-\frac{21x^2}{4}-\frac{19x^3}{4}+\cdots$;