

1. Troque a ordem de integração em:

(a) $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$ (b) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$ (c) $\int_{-1}^2 \int_{y^2-4}^{y-2} f(x, y) dx dy$

2. Use integral dupla para calcular a área da região limitada por:

(a) $x = y^3, x + y = 2, y = 0$ (c) $y^2 = -x, x - y = 4, y = -1$ e $y = 2$
 (b) $y = x, y = 4x, xy = 36$
 (no primeiro quadrante)

3. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\iint_D \cos(y^3) dx dy$, onde D é limitada por $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$. (c) $\int_0^1 \int_{\arcsen y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$
 (b) $\int_1^4 \int_{\frac{\ln y}{2}}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx dy$ (d) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1 + y^3} dy dx$
 (e) $\int_0^1 \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} e^{x^3} dx dy + \int_1^4 \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^1 e^{x^3} dx dy$

4. Use uma integral dupla para calcular o volume do sólido W limitado por:

(a) $y = 0, z = 0, x + y = 4$ e $z = 4 - x^2$
 (b) $x = 0, z = 0, x + y = 9$ e $z = 9 - y^2$
 (c) $x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), situado no primeiro octante.
 (d) $x = 0, y = 0, z = 0, z = 6 - x, x = 4 - y^2$, situado no primeiro octante.

5. Passe para coordenadas polares e calcule:

(a) $\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} xy dx dy$ (c) $\int_1^3 \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$
 (b) $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$ (d) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dy dx$

6. Exprima (sem calcular) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sec \theta}^{2 \cos \theta} \frac{r^2}{1 + r \sin \theta} dr d\theta$ como integral iterada em coordenadas retangulares, nas duas possíveis ordens de integração.

7. Seja $I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{-x}^0 f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x, y) dy dx$.

- (a) Transforme I em uma só integral iterada na ordem invertida.
 (b) Calcule I para $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

8. Seja $I = \int_{-1}^1 \int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dydx$
- (a) Inverta a ordem de integração em I .
- (b) Calcule I para $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
9. Achar o volume do sólido limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
10. Calcule o volume do sólido que não contém a origem e é limitado pelas superfícies $z = 4 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$.
11. Calcule o volume do sólido interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e ao cilindro $x^2 + y^2 = 4x$ e acima do plano $z = 0$.
12. Calcule o volume do sólido contido no primeiro octante, limitado pelo cone $z = r$, pelo cilindro $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ e pelo plano $z = 0$.
13. Uma placa D tem a forma da região limitada pelas retas $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. A densidade em cada ponto é inversamente proporcional à distância do ponto à origem. Determine a massa da placa.
14. Uma placa fina é limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, ($a > 0$), e tem densidade $\rho(x, y) = \frac{a^2}{a^2 + x^2 + y^2}$. Calcule o momento de inércia polar em função de sua massa M .
15. Seja uma lâmina delgada representada pela região D , determinada por $y \leq x$, $y \geq -x$, $x^2 + y^2 \geq 2x$ e $x^2 + y^2 \leq 4x$. Se a densidade em cada ponto é dada por $\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, determine:
- (a) A massa de D .
- (b) O momento de inércia em relação à origem.
16. Uma placa fina de densidade constante ρ tem a forma de um setor circular de raio a e ângulo central 2α . Mostre que o momento de inércia em relação à bissetriz do ângulo é dado por $\frac{1}{4}Ma^2 \left(1 - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\alpha}\right)$, onde M é a massa da placa.
17. Calcule as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de massa de uma chapa homogênea D com o formato de um triângulo isósceles com base 10cm e altura 5cm .
18. Calcule o centro de massa da lâmina $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, se a densidade é proporcional à distância de (x, y) ao eixo y .
19. Calcule o centro de massa do conjunto $D = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$, sendo a densidade proporcional à distância do ponto à origem.
20. Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo retângulo com lados iguais de medida a . Ache o momento de inércia em relação a um dos lados iguais, em função de sua massa M .
21. Calcule a massa de uma lâmina delimitada por $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$, se a densidade em um ponto é proporcional à distância desse ponto a $(1, 2)$.
22. Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo retângulo de catetos b e h . Ache o momento de inércia em função de sua massa M .
- (a) em relação ao eixo x (b) em relação ao eixo y
23. Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo equilátero de lado a . Ache o momento de inércia em relação
- (a) a uma altura (b) a um lado

24. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y+4}{2}} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2} dx dy$

(b) $\iint_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 dx dy$, D é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

(c) $\iint_D \frac{y^2 e^{xy}}{x} dA$, D é a região no primeiro quadrante, limitada pelas parábolas

$$\frac{x^2}{y} = 1, \frac{y^2}{x} = 1, x^2 = 4y \text{ e } y^2 = 4x.$$

(d) $\iint_D \text{sen}(4x^2 + y^2) dx dy$, $D = \{(x, y); 4x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

(e) $\iint_D (\sqrt{y/x} + \sqrt{xy}) dx dy$, D é a região do primeiro quadrante, limitada pelas hipérbolas $xy = 1$, $xy = 9$ e pelas retas $y = x$ e $y = 4x$.

(f) $\iint_D (x+y-1)(x-y)^6 dx dy$, D é o quadrado $|x| + |y| \leq 1$.

(g) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, D é a região do primeiro quadrante, limitada por $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 1$ e $xy = 3$.

Respostas

1. (a) $\int_0^1 \int_{e^y}^e f(x, y) dx dy$

(b) $\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_0^{(1-x)^2} f(x, y) dy dx$

(c) $\int_{-4}^{-3} \int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x, y) dy dx + \int_{-3}^0 \int_{x+2}^{\sqrt{x+4}} f(x, y) dy dx$

2. (a) $\frac{5}{4}$

(b) $\frac{2\sqrt{2}+2}{45} + \frac{\sqrt{2}}{6} \pi$

(b) $36 \ln 2$

(c) $-2 \ln(\sqrt{2} - 1) = 2 \ln(\sqrt{2} + 1)$

(c) $\frac{33}{2}$

(d) $\frac{9\pi^2}{16}$

3. (a) $\frac{1}{3} \text{sen } 8$

(b) $1 - \ln 2$

(c) $\frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$

(d) $\frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1)$

(e) $\int_0^1 \int_{x^2}^{4x^2} e^{x^3} dy dx = e - 1$

6. $\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+y} dy dx =$

$$\int_0^1 \int_1^{1+\sqrt{1-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+y} dx dy$$

7. (a) $\int_{-1}^0 \int_{-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$

(b) $\frac{10\sqrt{2}}{9}$

4. (a) $\frac{128}{3}$

(b) 324

(c) $\frac{2a^3}{3}$

(d) $\frac{352}{15}$

8. (a) $\int_1^2 \int_{-\sqrt{1-(1-y)^2}}^{\sqrt{1-(1-y)^2}} f(x, y) dx dy$

(b) $2\sqrt{2} + 2 \ln(\sqrt{2} - 1)$

5. (a) $\frac{2}{3}$

9. $\frac{2\pi}{3} (8 - 3\sqrt{3})$
10. $\frac{9\pi}{2}$
11. $\frac{64}{3} (\pi - \frac{4}{3})$
12. 6
13. $\frac{k}{2} \ln 3$
14. $Ma^2 (\frac{1-\ln 2}{\ln 2})$
15. (a) $2\sqrt{2}$
 (b) $\frac{140}{9}\sqrt{2}$
17. O centro de massa situa-se a $\frac{5}{3} cm$ da base, sobre sua mediatriz.
18. $(\frac{3\pi}{32}, 0)$
19. $(0, \frac{45}{14\pi})$
20. $\frac{Ma^2}{6}$
21. $\frac{2k\pi}{3}$
22. (a) $\frac{Mh^2}{6}$
 (b) $\frac{Mb^2}{6}$
23. (a) $\frac{k\sqrt{3}a^4}{96}$
 (b) $\frac{k\sqrt{3}a^4}{32}$
24. (a) $e^{16} - 1$
 (b) $\frac{1}{6}$
 (c) $\frac{1}{3} (\frac{e^{16}}{4} - \frac{5e^4}{4} + e)$
 (d) $\frac{\pi}{4}(1 - \cos 1)$
 (e) $8 + \frac{52}{3} \ln 2$
 (f) $-\frac{2}{7}$
 (g) 8