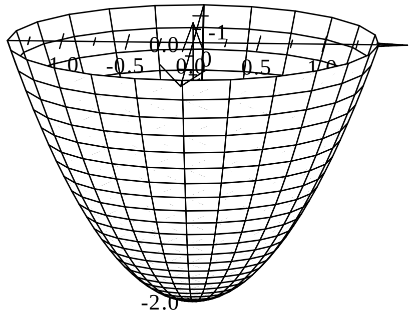
Gabarito da Prova 2 de Cálculo 3A (29/06/2019)

1) Sejam $F(x,y,z) = (x^2z, ze^{x^2}, x^2+y^2)$ um campo vetorial e S a superfície dada por $z = -2 + x^2 + y^2$, com $z \leq 0$. Calcule

$$\iint_S F \cdot n \, dS,$$

sendo que n é o vetor normal de S que aponta para dentro.

Seja W o sólido $-2 + x^2 + y^2 \leq z \leq 0$. Por Gauss



$$\iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS - \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

onde D é o disco $x^2 + y^2 \leq 2$, $z = 0$ ("tampando"a superficie) e ambas S e D estão orientadas para cima. Para calcular o lado esquerdo, temos

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(x^2z)}{\partial x} + \frac{\partial\left(ze^{x^2}\right)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial z} = 2xz$$

cuja integral em W, por simetria ($x \to -x$) vale 0.
Assim, basta calcular o fluxo de $\vec{F}$ através de D; em D, temos $z = 0$, portanto

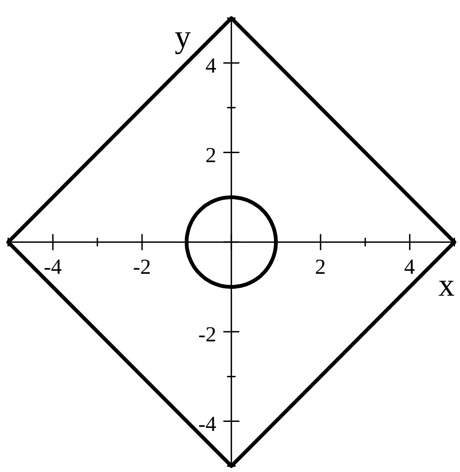
$$\vec{F}(x,y,0) = \left(0, 0, x^2+y^2\right) \text{ e } \vec{n} = \vec{k} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{n} = x^2 + y^2$$

e enfim

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot r dr d\theta = 2\pi \frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{4} = 2\pi$$

2) Seja C o quadrado de vértices $(5,0)$, $(0,5)$, $(-5,0)$ e $(0,-5)$, orientado no sentido anti-horário. Calcule a integral de linha de campo vetorial

$$\int_C \left(y^2x^2 - \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + 2x\right) dy.$$



Vamos dividir a integral em duas:

$$I_1 = \int_C y^2x^2 \, dx + 2x \, dy.$$

$$I_2 = \int_C -\tfrac{y}{x^2+y^2} \, dx + \tfrac{x}{x^2+y^2} \, dy$$

Para a primeira, seja R a região dentro do quadrado. Por Green:

$$\int_C y^2x^2 \, dx + 2x \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial(2x)}{\partial x} - \frac{\partial\left(x^2y^2\right)}{\partial y}\right) dA = \iint_R \left(2 - 2x^2y\right) dA =$$
$$= 2A(R) = 2 \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 100$$

pois, por simetria ($y \to -y$), o segundo termo tem integral nula.

Para a segunda, seja R_2 a região dentro do quadrado mas fora do circulo $C_2 : x^2 + y^2 = 1$ .Agora:

$$\int_{C-C_2} -\frac{y}{x^2+y^2} \, dx + \frac{x}{x^2+y^2} \, dy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}\right) dA = 0$$

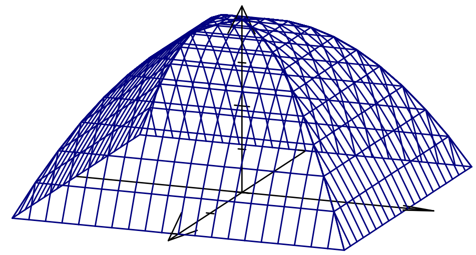
Portanto, parametrizando C_2 por $(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, temos:

$$I_2 = \int_{C_2} -\frac{y}{x^2+y^2} \, dx + \frac{x}{x^2+y^2} \, dy = \int_0^{2\pi} -\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t dt = 2\pi$$

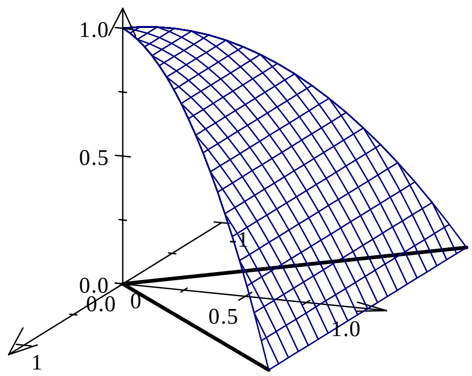
Enfim

$$I_1 + I_2 = 100 + 2\pi$$

3) Calcule a área lateral da superfície do sólido dado por $z \leq 1 - y^2$, $z \leq 1 - x^2$ e $z \geq 0$ (vide figura).



Por simetria, basta calcular a área de um dos 4 "lados", e multiplicar por 4. Vamos calcular a área do lado "direito" D*:*



Este lado pode ser parametrizado como gráfico de função:

$$\vec{r}(x,y) = \left(x, y, 1-y^2\right) \text{ onde } -y \leq x \leq y \text{ e } 0 \leq y \leq 1$$

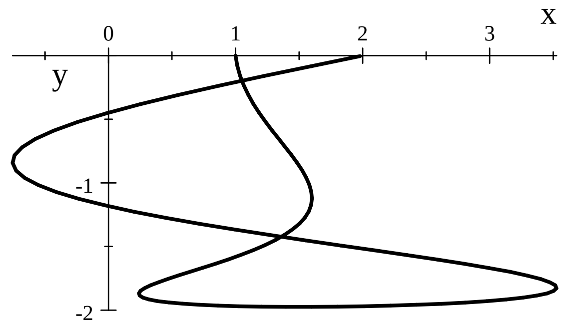
pois a interseção dos dois cilindros é $z = 1 - y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x = \pm y$*. Assim:*

$$\vec{r}_x = (1,0,0)\,;\ \vec{r}_y = (0,1,-2y) \Rightarrow \vec{r}_x \times \vec{r}_y = (0,2y,1) \Rightarrow |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{1+4y^2}$$

e enfim

$$A = 4\iint_D 1dS = 4\int_0^1 \int_{-y}^{y} \sqrt{1+4y^2}dxdy = 8\int_0^1 y\sqrt{1+4y^2}dy = \frac{2}{3}\left(1+4y^2\right)^{3/2}\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

4) Seja $F(x,y)=\left(\frac{y+x^3+y^2x}{x^2+y^2},\frac{yx^2+y^3-x}{x^2+y^2}\right)$. **(Não é necessário justificar):**
(a) F é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$?
(b) Qual é o valor de $\int\limits_C F\cdot dr$, onde C é a curva que começa em $(1,0)$ e termina em $(2,0)$, indicada no desenho?



a) Note que

$$\vec{F}(x,y)=(P,Q)=\left(\frac{y}{x^2+y^2}+x,y-\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{\partial\left(y-\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{y}{x^2+y^2}+x\right)}{\partial x}\right)=0$$

Mas, infelizmente, nada podemos concluir daqui, pois o campo não está definido na origem!

Tentemos outra abordagem: vamos calcular a circulação de $\vec{F}$ num circulo C_1 de raio 1 em torno da origem. Assim $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t)$, $0\leq t\leq 2\pi$ e ali

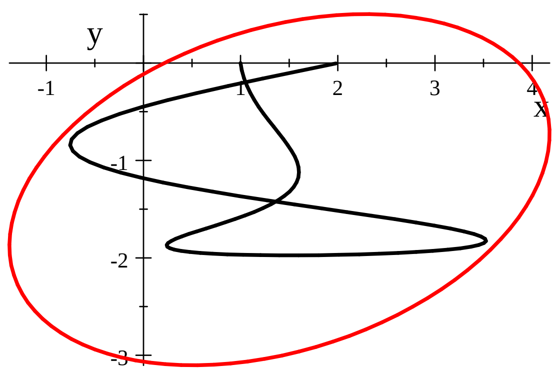
$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(t)) &= (\sin t+\cos t,\sin t-\cos t)\\ \vec{r}'(t) &= (-\sin t,\cos t)\\ \vec{F}\cdot\vec{r}' &= -\sin^2 t-\sin t\cos t+\sin t\cos t-\cos^2 t=-1\end{aligned}$$

e enfim

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}-1dt=-2\pi$$

Como a integral de linha nesta curva fechada não deu 0, $\vec{F}$ não pode ser conservativo.

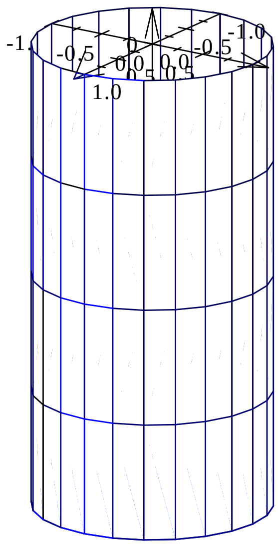
b) Isto dito, o campo é conservativo numa região simplesmente conexa contendo a curva dada – basta tomar uma região que contenha a curva mas não a origem!



Então ali o campo é independente por caminhos; trocando o caminho dado pelo segmento de $(1,0)$ a $(2,0)$, temos:

$$\int\limits_C F\cdot dr=\int_1^2\frac{0+x^3+0x}{x^2+0^2}dx=\frac{2^2-1^2}{2}=\frac{3}{2}.$$

5) Seja S a superfície de um copo **sem tampa**, descrito a seguir: a lateral do copo é o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-4 \leq z \leq 0$; o fundo do copo é a parte do plano $z = -4$ que se encontra dentro do cilindro. Considere o campo vetorial $F(x, y, z) = f(x, y, z) . (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$, onde $f(x, y, z)$ é uma função real (escalar) de classe C^1 em $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Calcule $\iint\limits_S rot(F) \cdot ndS$ onde n é a normal a S apontando para fora.



Pelo Teorema de Stokes:

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}(F) \cdot n\, dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde C é o circulo $x^2 + y^2 = 1$ no plano $z = 0$, orientado no sentido horário quando visto de cima, que pode ser parametrizado por

$$\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Agora

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(t)) &= f(\sin t, \cos t, 0)(\sin t, \cos t, 0) \\ \vec{r}'(t) &= (\cos t, -\sin t, 0) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = f(\sin t, \cos t, 0) . (\sin t \cos t - \sin t \cos t) = 0$$

ao longo da curva C. Assim

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}(F) \cdot n\, dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$