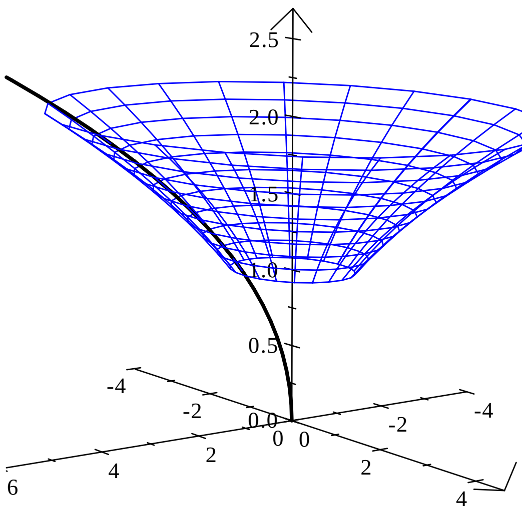
Gabarito da VR de Calculo III–A 2019/1

1) Seja C a parte da curva $x = z^2$, no plano xz, compreendida entre $z = 1$ e $z = 2$, e T a superfície obtida girando C em torno do eixo z. Se a densidade de T no ponto (x, y, z) é $\rho(x, y, z) = 1/z$, encontre a massa total de T.



Parametrizando a superfície, temos

$\vec{r}\,(t,\theta) = \left(t^2\cos\theta, t^2\sin\theta, t\right)$ onde $1 \le t \le 2$ e $0 \le \theta \le 2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{r}_t = (2t\cos\theta, 2t\sin\theta, 1)\,; \vec{r}_\theta = \left(-t^2\sin\theta, t^2\cos\theta, 0\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{N} = \vec{r}_t \times \vec{r}_\theta = \left(-t^2\cos\theta, -t^2\sin\theta, 2t^3\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{r}_t \times \vec{r}_\theta| = \sqrt{t^4 + 4t^6} = t^2\sqrt{1 + 4t^2}$

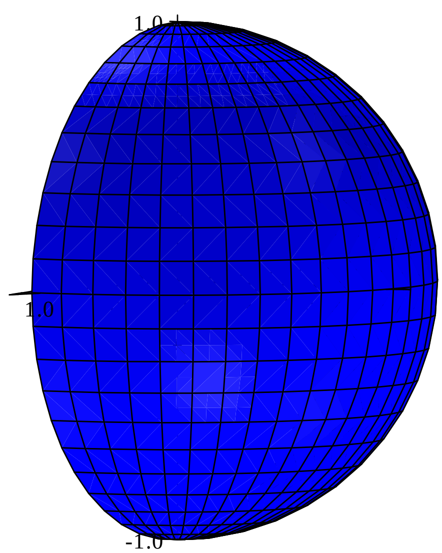
Portanto

$$Massa = \iint\limits_T \tfrac{1}{z} dS = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \tfrac{1}{t} t^2\sqrt{1+4t^2}\,dtd\theta =$$

$$= 2\pi\, \frac{\left(1+4t^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{t=1}^{t=2} = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$$

2) Seja S o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ em que vale $y \ge 0$, orientado de maneira que a normal $\vec{n}$ tenha componente y positiva. Calcule o fluxo através de S do campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (ye^{(z+1)^2}, 4, z^4).$$



Seja W o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $y \ge 0$.

Nele, podemos aplicar o Teorema de Gauss, obtendo

$$\iint\limits_S \vec{F}.\vec{n}dS + \iint\limits_D \vec{F}.\vec{n}dS = \iiint\limits_W \operatorname{div}\vec{F}dV$$

onde D é o disco $x^2 + z^2 = 1,\ y = 0$, orientado para "a esquerda". Mas:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{(z+1)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}4 + \frac{\partial}{\partial z}z^4 = 4z^3$$

e, portanto, por simetria $z \to -z$, temos $\iiint\limits_W \operatorname{div}\vec{F}dV = 0.$

Agora, em D, temos $\vec{n} = -\vec{j}$, portanto

$$\iint\limits_D \vec{F}.\vec{n}dS = \iint\limits_D -4dS = -4Area\,(D) = -4\pi.$$

Juntando tudo:

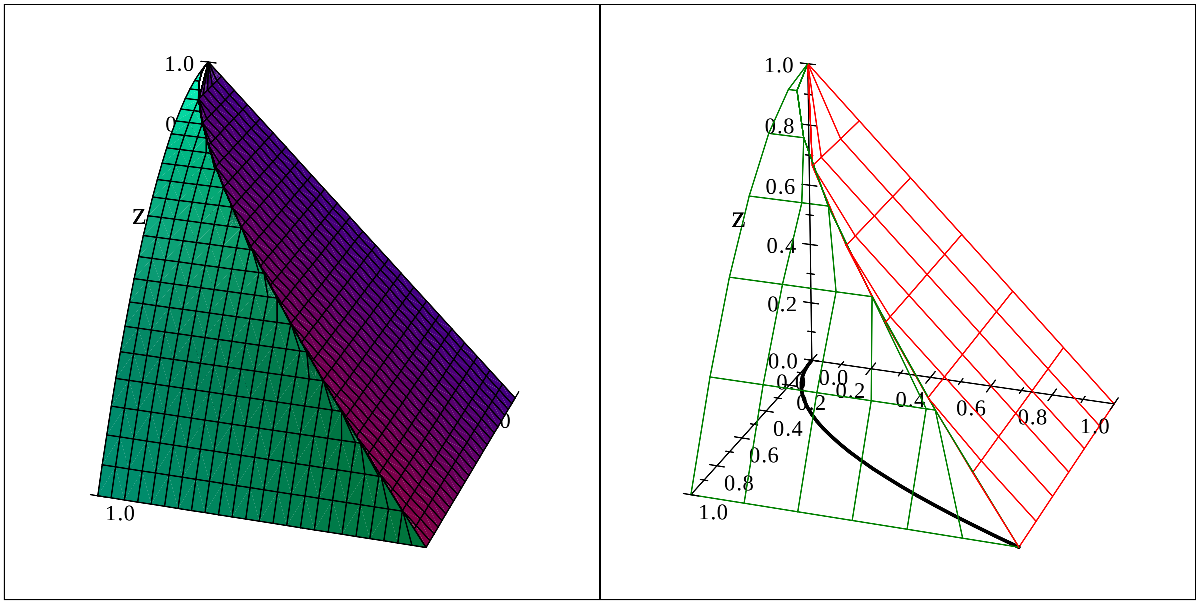
$$\iint\limits_S \vec{F}.\vec{n}dS = 0 + 4\pi = 4\pi$$

3) Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ o sólido no primeiro octante limitado pelas superfícies

$$z + x^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad z + y = 1.$$

Escreva o volume de W como uma soma de integrais triplas, preenchendo as lacunas abaixo. **Não precisa justificar**

$$Vol(W) = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \int_0^{1-x^2} 1\, dz\, dx\, dy$$
$$+ \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} \int_0^{1-y} 1\, dz\, dx\, dy.$$



As superfícies são dois cilindros, que se cortam ao longo da curva

$$z + x^2 = z + y = 1$$

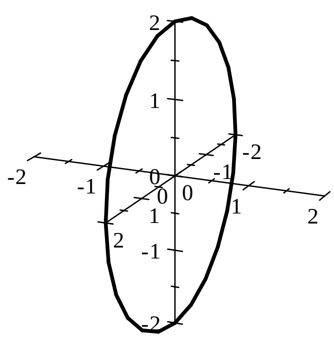
Note que, nesta curva, temos $y = x^2$*, o que caracteriza a projeção da interseção no plano* xy *(vide segunda figura). Assim, dividimos o sólido na parte de "teto verde"(a primeira integral) e a parte de "teto vermelho"(a segunda), como na resposta.*

4) Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ curva de interseção do cilindro $x^2 + z^2 = 4$ com o plano $y = 0$, orientada de modo que, no ponto $(2, 0, 0)$, o vetor tangente aponte para cima. Calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(yz + \frac{-z}{x^2 + z^2} \right) \vec{i} + xz\vec{j} + \left(xy + \frac{x}{x^2 + z^2} \right) \vec{k}.$$



Usar Stokes fica complicado: o campo não é definido no eixo y (onde $x = z = 0$),

então não podemos calcular $\iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ numa superfície S tal que $C = \partial S$.

O jeito é fazer direto mesmo! Parametrizando C:

$\vec{r}\,(t) = (2\cos t, 0, 2\sin t)\,, 0 \le t \le 2\pi \Rightarrow \vec{r}'\,(t) = (-2\sin t, 0, 2\cos t)$

onde note que $\vec{r}\,(0) = (2, 0, 0)$ e $\vec{r}'\,(0) = (0, 0, 2)$, para cima. Agora:

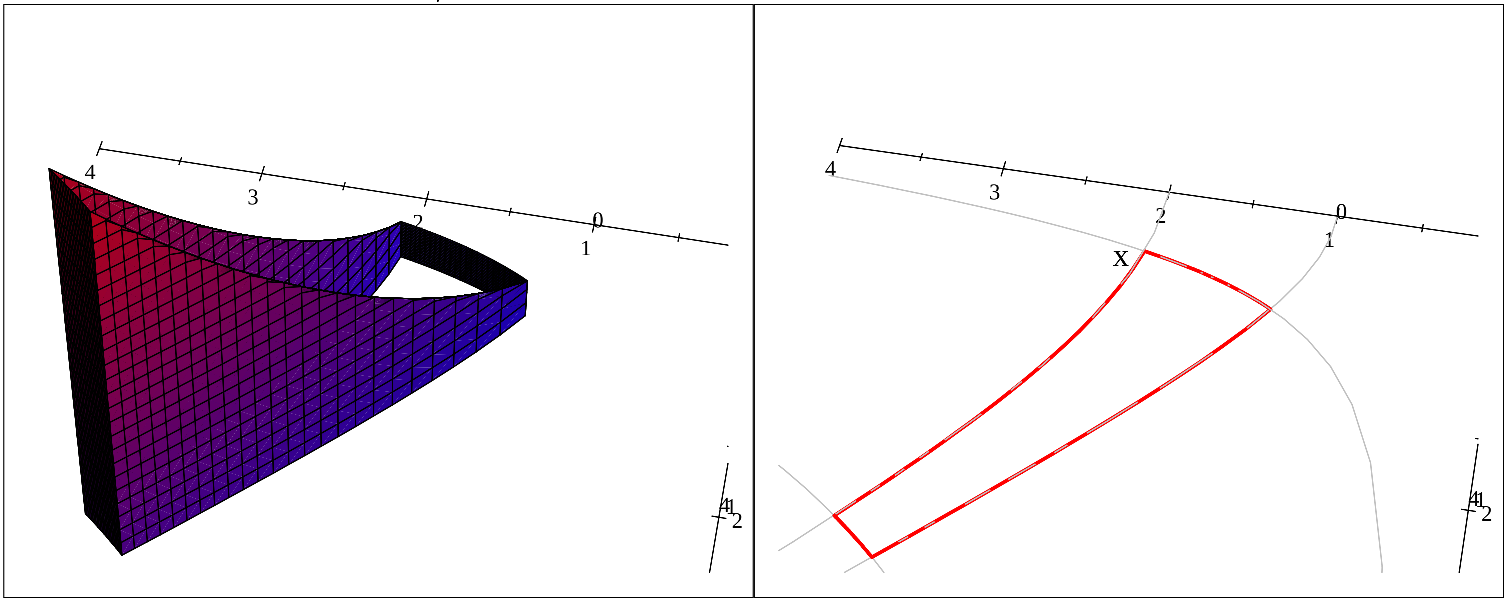
$\vec{F}\,(\vec{r}\,(t)) = \left(0 - \frac{2\sin t}{4}, 4\sin t\cos t, 0 + \frac{2\cos t}{4}\right) \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{r}' = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$

5) Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ o sólido que consiste dos pontos (x, y, z) do primeiro octante que satisfazem as desigualdades

$$1 \leq x^2 - y^2 \leq 4, \qquad 1 \leq xy \leq 9, \qquad \text{e} \qquad 0 \leq z \leq xy.$$

O sólido W é uniforme de densidade $\rho = 1$. Calcule o momento de inércia de W em torno do eixo z.



A lateral de W está esboçada na figura da esquerda, cuja projeção D no plano xy, na figura da direita, é representada por $1 \leq x^2 - y^2 \leq 4$ e $1 \leq xy \leq 9$. Claramente, fica muito mais fácil de descrever W usando novas coordenadas $u = xy$ e $v = x^2 - y^2$ (e $z = z$ mesmo). Nestas novas coordenadas, W é simplesmente:

$$1 \leq v \leq 4; \qquad 1 \leq u \leq 9; \qquad 0 \leq z \leq u$$

O determinante Jacobiano desta mudança de coordenadas é

$$\left| \frac{\partial (u, v, z)}{\partial (x, y, z)} \right| = \left| \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ 2x & -2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| -2y^2 - 2x^2 \right| = 2x^2 + 2y^2$$

e, portanto

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint\limits_W \left(x^2 + y^2\right) \ \rho \ dV = \int_1^4 \int_1^9 \int_0^u \frac{x^2 + y^2}{2\left(x^2 + y^2\right)} dz \ du \ dv = \\ &= \int_1^4 \int_1^9 \frac{u}{2} du dv = 3 \cdot \frac{\left(9^2 - 1^2\right)}{4} = 60 \end{aligned}$$