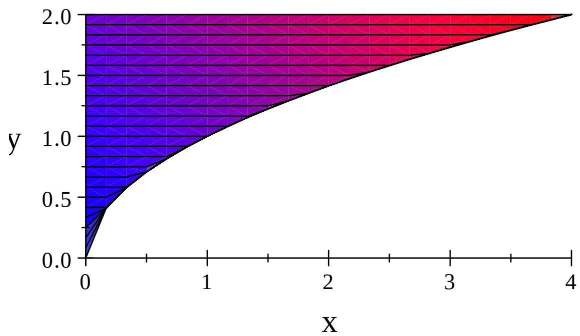
Gabarito da VS de Cálculo III–A 2019/1

1) Calcule as seguintes integrais:

a) [Stewart, 15.3.51] $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\, dy\, dx$.



Como a integral de $\frac{1}{y^3+1}$ é trabalhosa, vamos inverter a ordem de integração. Temos:

$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{1}{y^3+1} dx dy = \int_0^2 \frac{y^2}{y^3+1} dy =$

$= \frac{\ln\left(y^3+1\right)}{3}\Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 9}{3} = \frac{2\ln 3}{3}$

b) [Stewart, 15.9.21] $\displaystyle\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^2\, dV$ onde B é a bola com centro na origem e raio 5.

Em coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^2\, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^5 \rho^4\ \rho^2 \sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \cdot \int_0^5 \rho^6 d\rho = 4\pi \cdot \frac{5^7}{7}\end{aligned}$$

2) [Stewart, 16.9.17] Calcule $\displaystyle\iint_S F\cdot \vec{n}\, dS$, onde $F(x,y,z) = z^2x\vec{\imath} + (\frac{1}{3}y^3 + \tan z)\vec{\jmath} + (x^2z+y^2)\vec{k}$, S é a metade superior da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ e o vetor $\vec{n}$ tem terceira componente não negativa.

Tampe S com o disco $D : x^2+y^2=1; z=0$, orientado para baixo. Entre D e S temos o sólido W, no qual podemos usar o Teorema de Gauss

$$\iiint\limits_W \operatorname{div}\vec{F} dV = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS + \iint_D \vec{F}\cdot\left(-\vec{k}\right)\, dS$$

Agora

$$\operatorname{div}\vec{F} = z^2+y^2+z^2 \Rightarrow \iiint\limits_W \operatorname{div}\vec{F} dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^2\cdot\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta = 2\pi\cdot 1\cdot\frac{1}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

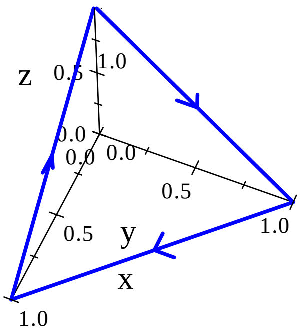
enquanto, usando coordenadas polares,

$$\iint_D \vec{F}\cdot\left(-\vec{k}\right)\, dS = \iint_D -\left(x^2\cdot 0 + y^2\right) dA = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\theta\cdot r\ dr\ d\theta = -\frac{1}{4}\cdot\pi$$

Portanto

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{20}$$

3) [Lista GMA, 6.26] Calcule $\int_C (e^{x^2}+y^2)\,dx+(e^{y^2}-z^2)\,dy+(e^{z^2}-x^2)\,dz$, onde C é o contorno da parte do plano $x+y+z=1$, que está no primeiro octante, no sentido anti-horário, quando visto da origem.



Seja T a parte do plano $x+y+z=1$ no primeiro octante (um triângulo).
Pelo Teorema de Stokes:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_T rot\vec{F}\cdot\vec{n}\;dS$$

onde $\vec{n}$ aponta "para dentro"da figura (isto é, tem coordenadas negativas).

Para calcular a integral de fluxo, fazemos:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{x^2}+y^2 & e^{y^2}-z^2 & e^{z^2}-x^2 \end{vmatrix} = 2z\mathbf{i}+2x\mathbf{j}-2y\mathbf{k}$$

e parametrizamos T por

$$\begin{aligned} \vec{r}\,(u,v) &= (x,y,1-x-y) \text{ para } (x,y)\in P \Rightarrow \\ &\Rightarrow r_x=(1,0,-1)\,;r_y=(0,1,-1)\Rightarrow \vec{N}=\vec{r_x}\times\vec{r_y}=(1,1,1) \end{aligned}$$

onde P (projeção de T no plano xy), é dado por $x,y\geq 0$ e $x+y\leq 1$. Como este normal $\vec{N}$ tem a orientação "errada", queremos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}.d\vec{r} &= \iint_T rot\vec{F}\cdot\vec{n}\;dS = \int_0^1\int_0^{1-y}(2\,(1-x-y)\,,2x,-2y)\cdot(-1,-1,-1)\;dx\;dy = \\ &= \int_0^1\int_0^{1-y} -2+4y\;dx\;dy = 2\int_0^1(2y-1)\,(1-y)\,dy = 2\int_0^1 -2y^2+3y-1\;dy = 2\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1\right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

5) [Stewart, 16.4.21] a) Se C é um segmento de reta ligando o ponto (x_1,y_1) ao ponto (x_2,y_2), mostre que

$$\int_C x\,dy-y\,dx = x_1y_2-x_2y_1.$$

b) Se os vértices de um polígono, em sentido anti-horário, são $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$, usando o item (a) mostre que a área do polígono é

$$A=\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\ldots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+(x_ny_1-x_1y_n)].$$

a) Uma parametrização para o segmento é

$$x\,(t)=x_1+t\,(x_2-x_1)\,;\quad y\,(t)=y_1+t\,(y_2-y_1)$$

onde $0\leq t\leq 1$. Assim

$$\begin{aligned} \int_C xdy-ydx &= \int_0^1 (x_1+t\,(x_2-x_1))\cdot(y_2-y_1)-(y_1+t\,(y_2-y_1))\cdot(x_2-x_1)\,dt = \\ &= \int_0^1 x_1\,(y_2-y_1)-y_1\,(x_2-x_1)\,dt = x_1\,(y_2-y_1)-y_1\,(x_2-x_1)=x_1y_2-x_2y_1 \end{aligned}$$

b) Seja C_i o segmento de reta que liga (x_i,y_i) a (x_{i+1},y_{i+1}) (e C_n o segmento que liga (x_n,y_n) a (x_1,y_1)). Como o bordo do polígono $\partial P=C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_n$ é fechado e orientado positivamente, pelo Teorema de Green temos

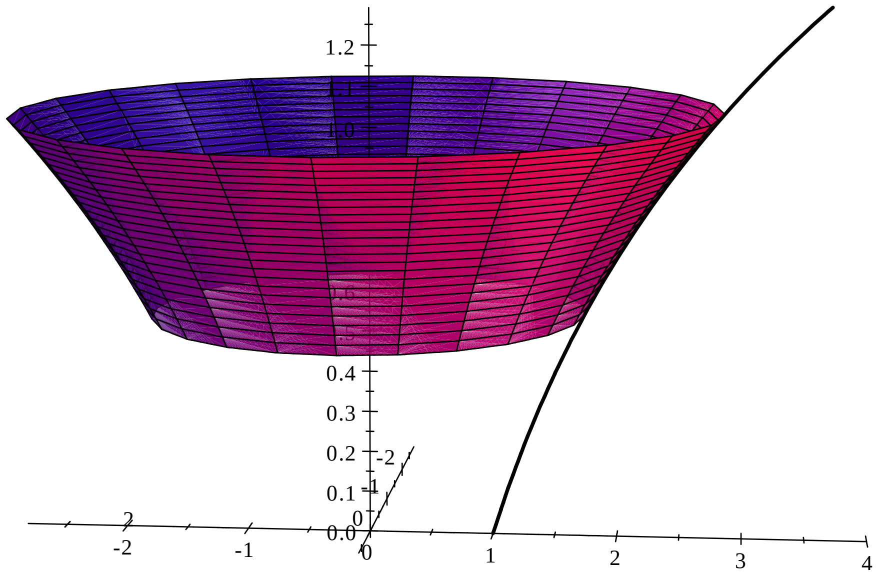
$$\int_{\partial P} xdy-ydx = \iint_P \frac{\partial x}{\partial x}-\left(\frac{\partial\,(-y)}{\partial y}\right)dA = 2\iint_P dA = 2A$$

Por outro lado, usando o item (a) em cada curva C_i:

$$\begin{aligned} \int_{\partial P} xdy-ydx &= \int_{C_1} xdy-ydx+\int_{C_2} xdy-ydx+\ldots+\int_{C_n} xdy-ydx = \\ &= (x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\ldots+(x_ny_1-x_1y_n) \end{aligned}$$

Juntando as duas igualdades, obtemos o resultado desejado.

4) [Lista GMA, 5.15] Seja S a superfície de rotação obtida girando $C = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \ln y, \sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{8}\}$ em torno do eixo z. Calcule a massa de S, sabendo que a densidade em cada ponto é igual à distância do ponto ao eixo z.



Sabemos que

$$Massa = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$$

A curva original pode ser parametrizada por $y = t$ e $z = \ln t$ com $\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{8}$, então uma parametrização para a superfície é:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t, \theta) &= (t\cos\theta, t\sin\theta, \ln t) \text{ onde } \sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{8} \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow r_t = \left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{1}{t}\right); r_\theta = (-t\sin\theta, t\cos\theta, 0) \Rightarrow \vec{N} = r_t \times r_\theta = (-\cos\theta, -\sin\theta, t) \end{aligned}$$

Assim, $dS = \left|\vec{N}\right| dtd\theta = \sqrt{1+t^2}dtd\theta$, e portanto

$$Massa = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} t \cdot \sqrt{1+t^2}dt\ d\theta = 2\pi \cdot \left. \frac{\left(1+t^2\right)^{3/2}}{3} \right|_{t=\sqrt{3}}^{t=\sqrt{8}} = \frac{2\pi}{3}(27-8) = \frac{38\pi}{3}$$