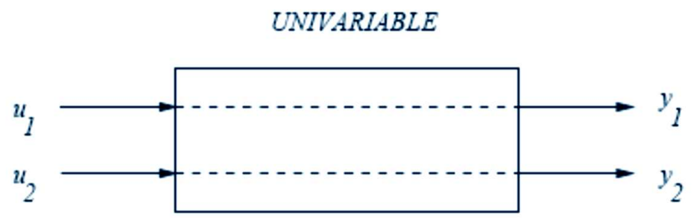
Sistemas Multivariaveis: conceitos fundamentais

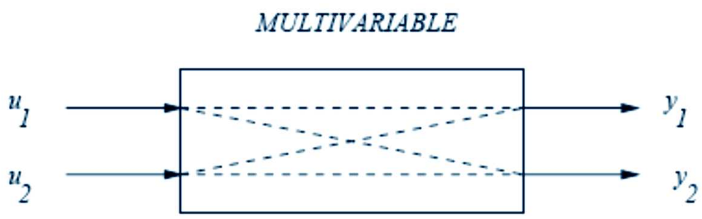
Profª Ninoska Bojorge

Sistemas multivariáveis

São sistemas com várias entradas e saídas, em que uma entrada afeta a várias saídas e reciprocamente uma saída é afetada por várias entradas.

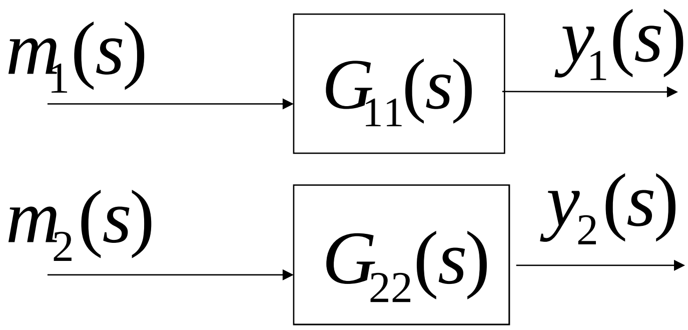


SISO



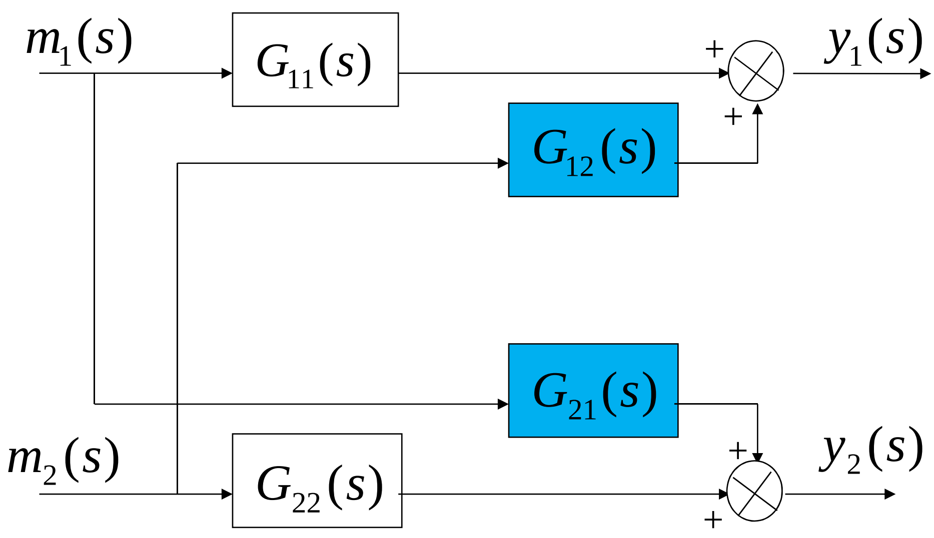
MIMO

Outra maneira de vê-lo



Neste sistema cada entrada afeta só uma saída

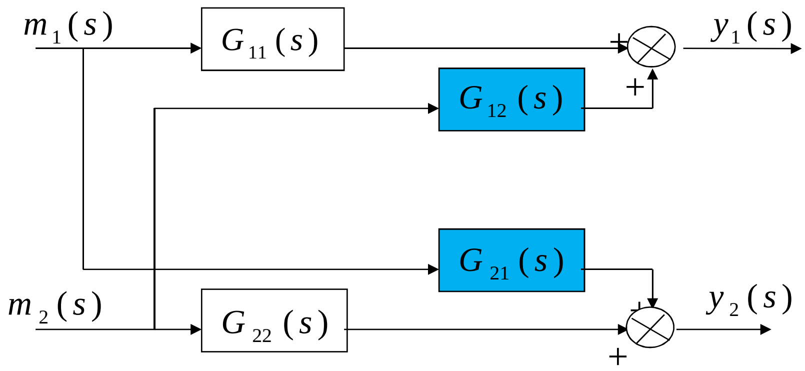
Não há interação!!



Neste sistema uma variável de entrada afeta a mais de uma variável de saída.

apresenta interação

Este é o efeito mais importante no projeto de ajuste das malhas de controle para esses sistemas.



Sua representação matricial de estado é:

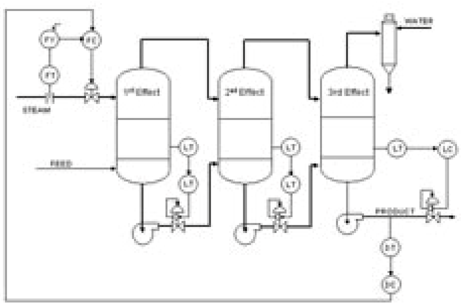
$$y_1(s) = G_{11}(s)m_1(s) + G_{12}(s)m_2(s)$$

$$y_2(s) = G_{21}(s)m_1(s) + G_{22}(s)m_2(s)$$

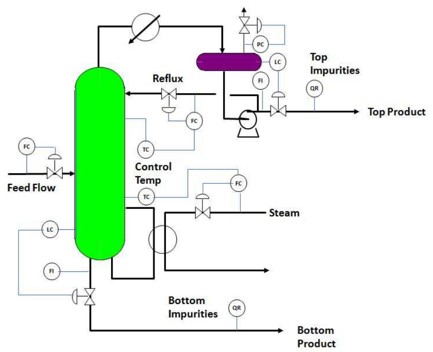
$$Y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} \quad M(s) = \begin{bmatrix} m_1(s) \\ m_2(s) \end{bmatrix} \quad G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = G(s)M(s)$$

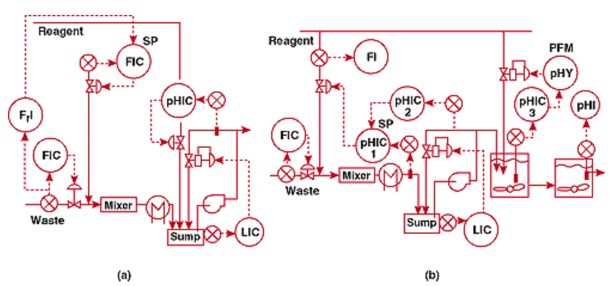
Exemplos de sistemas multivariáveis:



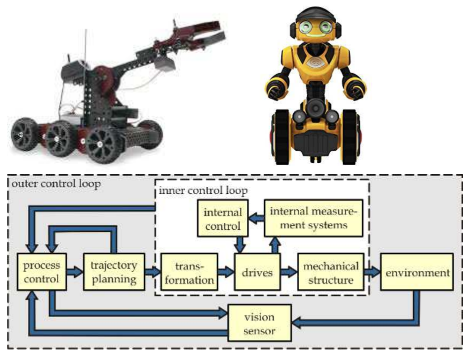
Controle de evaporador



Controle de uma coluna de destilação



Controle de processos de mistura



Controle de robô

Três **perguntas** se devem fazer quando se deseja controlar um sistema multivariável

1.- Qual é o efeito da interação sobre a resposta do sistema controlado?

2.- Quanta interação existe entre as malhas, e qual é a melhor forma de parear as variáveis manipuladas e controladas para reduzir o efeito da interação?

3.- Pode ser eliminada ou reduzida essa interação através do projeto do sistema de controle?

1.- Qual é o efeito da interação sobre a resposta do sistema controlado?

Tipos de interação:

Positiva

Quando a interação provoca que as duas malhas se ajudem mutuamente.

ou

Quando se fecham as outras malhas a mudança é na mesma direção que quando estavam abertos.

Negativa

Quando as duas malhas brigam entre si

ou

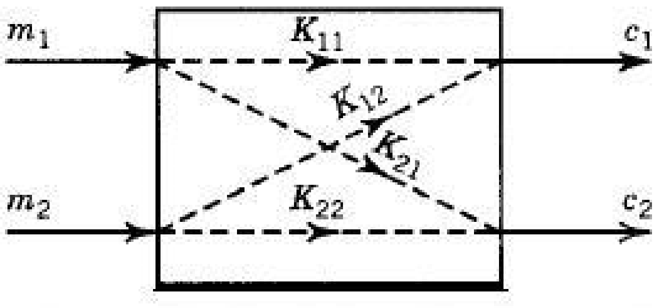
Quando se fecham as outras malhas a mudança é na direção contrária que quando estavam abertos.

Pareamento de variáveis controladas e manipuladas em sistemas de controle multivariáveis.

Para selecionar que sinal de mando (entrada) se relacionará com cada saída controlada, se precisa determinar quais de essas entradas e saídas têm uma **relação mais estreita e quais têm forte interação ou se é desprezível** .

A medição da interação pode se estabelecer medindo a variação das saídas (variáveis controladas) com respeito a cada uma das entradas (variáveis manipuladas), o que se conhece como ganhos relacionais entre os pares de variáveis controladas e manipuladas do sistema.

Sistema multivariável 2x2



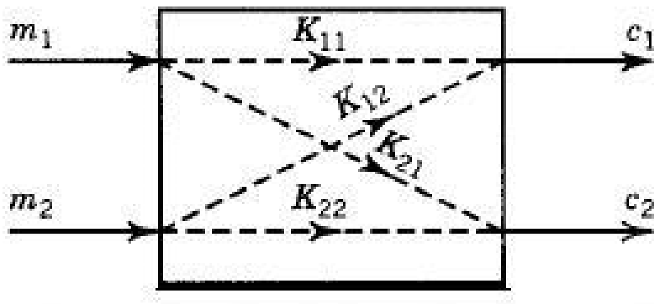
De aqui são definidas:

Ganho relacional E/S de sistemas multivariável em malha aberta (quando as outras variáveis manipuladas são mantidas constantes)

$$K_{ij} = \frac{\Delta y_i}{\Delta m_j}$$

$$K_{ij} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{m2} \qquad K_{12} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_2}\right|_{m1}$$

$$K_{21} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_1}\right|_{m2} \qquad K_{22} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_2}\right|_{m1}$$



Ganho relacional E/S de sistemas multivariável em malha fechada
(quando as outras variáveis controladas são mantidas constantes)

$$K'_{12} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{c2} \qquad K'_{12} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_2}\right|_{c2}$$

$$K'_{21} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_1}\right|_{c1} \qquad K'_{22} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_2}\right|_{c1}$$

Conceito de Ganho Relativo / medição de interação

A medição da interação proposta por Bristol é a relação entre o ganho em malha aberta e o ganho em malha fechada, definido como **ganho relativo** na seguinte equação

$$\lambda_{ij} = \frac{K_{ij}}{K'_{ij}} = \frac{ganho\ malha\ aberta}{ganho\ malha\ fechada}$$

Para este caso

$$\left| \begin{matrix} \lambda_{11} = \dfrac{K_{11}}{K'_{11}} & \lambda_{12} = \dfrac{K_{12}}{K'_{12}} \\[2ex] \lambda_{21} = \dfrac{K_{21}}{K'_{21}} & \lambda_{22} = \dfrac{K_{22}}{K'_{22}} \end{matrix} \right|$$

Matriz de ganho relativos

Cálculo de Matriz de Ganho relativo de sistemas 2x2

Pode se determinar de várias formas:

Experimental: realizam-se medições experimentais nas condições estabelecidas na definição dos ganhos por meio da simulação de seus modelos físico-químicos em estado estacionário.

Analítica no tempo: se faz por simples balanço de massa ou energia em estado estacionário e são obtidos os limites das variações das variáveis controladas com relação as manipuladas para quando as variações tendem a zero (estado estacionário) ou diretamente pela derivada parcial

$$K_{ij} = \lim_{\Delta mj \to 0} \left.\frac{\Delta c_i}{\Delta m_j}\right|_{\substack{mk \\ k \neq j}} = \frac{\partial c_i}{\partial m_j} = \frac{\left(\dfrac{\partial c_i}{\partial m_i}\right)_m}{\left(\dfrac{\partial c_j}{\partial m_j}\right)_c}$$

A forma mais rápida de achar a matriz é

$$\mu = [G(0)] * [G(0)^{-1}]^T$$

Este produto é o produto do Hadamard (elemento por elemento)

EXEMPLO

Um sistema **multivariavel** tem o seguinte modelo:

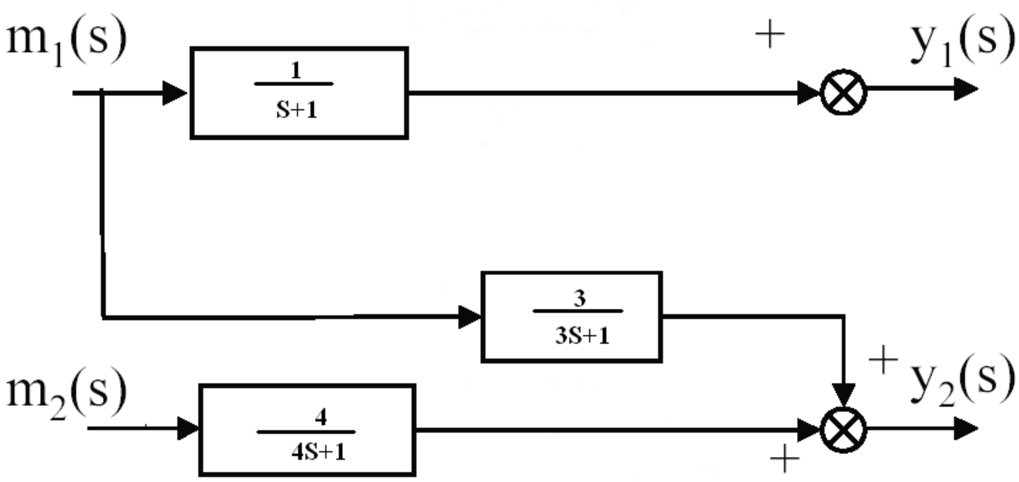
$$Y_1(s) = \frac{1}{s+1} m_1(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{3}{3s+1} m_1(s) + \frac{4}{4S+1} m_2$$

Representado em blocos é

$$Y_1(s) = \frac{1}{s+1} m_1(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{3}{3s+1} m_1(s) + \frac{4}{4s+1} m_2(s)$$



Determinemos agora a matriz de ganho relativo

- Lembrete de operações com matrizes

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G}(cofG)^T$$

Onde: G^{-1} = matriz inversa de G;
det G = Δ= determinante da matriz G;
$(\text{cof } G)^T$ = matriz transposta da matriz dos cofatores de A .

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Cof}(A) = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{Det}(A) = 5$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Cof}(A))^t}{\text{Det}(A)} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$Y_1(\mathrm{s}) = \frac{1}{s+1} m_1(s)$$

$$Y_2(\mathrm{s}) = \frac{3}{3s+1} m_1(s) + \frac{4}{4s+1}$$

$$\mu = [\mathrm{G}(0)] * \left[\mathrm{G}(0)^{-1}\right]^T$$

A partir do modelo, a matriz de transferências é

$$G(\mathrm{s}) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{s}+1} & 0 \\ \dfrac{3}{3\mathrm{s}+1} & \dfrac{4}{4\mathrm{s}+1} \end{vmatrix} \longrightarrow G(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$G(0)^{-1} = \frac{Adj}{\Delta} = \frac{\mathrm{cof}^{\mathrm{T}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3/4 & 1/4 \end{vmatrix}$$

$$\left[G(0)^{-1}\right]^T = \begin{vmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{vmatrix}$$

$$\mu = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Observações sobre esta matriz

È o arranjo mxn definido pelos ganhos relativos entre as diferentes variáveis controladas e manipuladas do sistema multivariável.
As variáveis controladas definem as filas, e as variáveis manipuladas definem as colunas da matriz.

$$\begin{array}{cc} \mathrm{m}_1 & \mathrm{m}_2 & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{vmatrix} \mu_{11} = \dfrac{K_{11}}{K'_{11}} & \mu_{12} = \dfrac{K_{12}}{K'_{12}} \\ \mu_{21} = \dfrac{K_{21}}{K'_{21}} & \mu_{22} = \dfrac{K_{22}}{K'_{22}} \end{vmatrix}} & \begin{array}{c} \mathrm{c}_1 \\ \\ \mathrm{c}_2 \end{array} \end{array}$$

A soma de todas suas filas e colunas sempre resulta a unidade

$$\begin{array}{cc|c} m_1 & m_2 & \\ 0.8 & 0.2 & C_1 \\ 0.2 & 0.8 & C_2 \end{array}$$

Para minimizar o efeito da interação em um sistema de controle multivariável, a dupla de variável controlada e manipulada se deve obter um ganho relativo o mais perto possível da unidade.

$$\begin{array}{cc|c} m_1 & m_2 & \\ 0.8 & 0.2 & C_1 \\ 0.2 & 0.8 & C_2 \end{array}$$

m1 deve controlar a C1

m2 deve controlar a C2

Nos sistemas com **ganho relativo negativo** devem ser evitados de qualquer forma.

$$
\begin{array}{ccc}
 & m_1 & m_2 \\
C_1 & -0.8 & 1.8 \\
C_2 & 1.8 & -0.8
\end{array}
$$

m1 nunca deve controlar a C1

m2 nunca controlar a C2

Não é recomendável utilizar **ganho relativo nulo**, pois significa que a variável manipulada não efeito direto na variável controlada e depende da interação com outras malhas para se controlar.

$$
\begin{array}{ccc}
 & m_1 & m_2 \\
C_1 & 0 & 1 \\
C_2 & 1 & 0
\end{array}
$$

m1 nunca deve controlar a C1

m2 nunca controlar a C2

EXEMPLO

Selecionar os acoplamentos entrada / saída que minimizam a interação entre malha nas seguintes matrizes de ganho relativo

$$a)\quad \lambda_1 = \begin{vmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{vmatrix}$$

$$b)\quad \lambda_2 = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 \end{vmatrix}$$

$$c)\quad \lambda_3 = \begin{vmatrix} -0.3 & 1.3 \\ 1.3 & -0.3 \end{vmatrix}$$

Fica uma pergunta por responder das três que fizemos ao início

3. Pode ser eliminada ou reduzida essa interacção através do projecto do sistema de controle?

SIM…

Podemos usar os chamados ¨desacopladores¨

A partir da equação do sistema

$$y_1(s) = G_{11}(s)m_1(s) + G_{12}(s)m_2(s)$$
$$y_2(s) = G_{21}(s)m_1(s) + G_{22}(s)m_2(s)$$

Suponha que acoplamos $y_1 \rightarrow m_1$, $y_2 \rightarrow m_2$ desejamos que y_1 não troque quando trocar m_2, y_2 não troque quando trocar m_1

$$y_1(s) = 0$$

$$G_{11}(s)m_1(s) + G_{12}(s)m_2(s) = 0$$

$$G_{11}(s)m_1(s) = -G_{12}(s)m_2(s)$$

$$m_1(s) = -\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)}m_2(s)$$

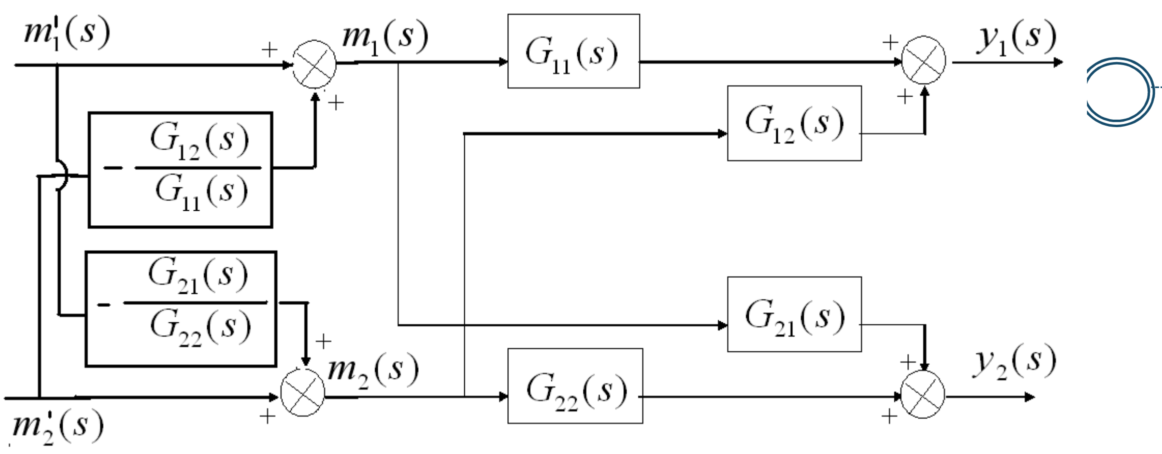
$$y_2(s) = 0$$

$$G_{21}(s)m_1(s) + G_{22}(s)m_2(s) = 0$$

$$G_{22}(s)m_2(s) = -G_{21}(s)m_1(s)$$

$$m_2(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)}m_1(s)$$

¨desacopladores¨



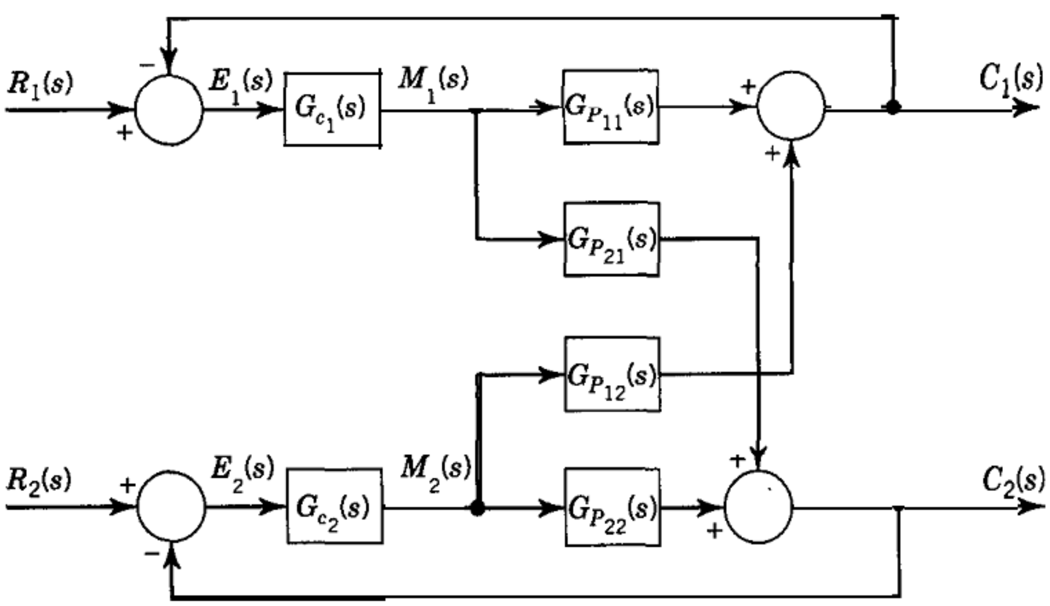
$$D_{21}(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} \qquad D_{12}(s) = -\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)} \qquad \mathbf{D}(s) = \begin{pmatrix} 1 & D_{12}(s) \\ D_{21}(s) & 1 \end{pmatrix}$$

Problemas que podem apresentar-se

Pode necessitar-se desacopladores não realizáveis fisicamente.

Os erros que tenha o modelo com o que se calcula o desacoplemento influem e podem afetar a estabilidade gravemente

Análise dinâmica de um sistema MIMO de 2x2



Aplicando as técnicas conhecidas da álgebra de blocos ou a fórmula do Mason

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_{c_1}(s)G_{P_{11}}(s)[1 + G_{c_2}(s)G_{P_{22}}(s)] - G_{c_1}(s)G_{P_{21}}(s)G_{c_2}(s)G_{P_{12}}(s)}{\Delta}$$

$$\frac{C_2(s)}{R_1(s)} = \frac{G_{c_1}(s)G_{P_{21}}(s)}{\Delta}$$

$$\frac{C_1(s)}{R_2(s)} = \frac{G_{c_2}(s)G_{P_{12}}(s)}{\Delta}$$

$$\frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_{c_2}(s)G_{P_{22}}(s)[1 + G_{c_1}(s)G_{P_{11}}(s)] - G_{c_2}(s)G_{P_{12}}(s)G_{c_1}(s)G_{P_{21}}(s)}{\Delta}$$

$$\Delta = [1 + G_{c_1}(s)G_{P_{11}}(s)][1 + G_{c_2}(s)G_{P_{22}}(s)] - G_{c_1}(s)G_{P_{12}}(s)G_{c_2}(s)G_{P_{21}}(s)$$

Que informação dão estas equações?

- O ajuste de cada controlador afeta a resposta de ambas as variáveis controladas porque seu efeito está na equação característica que é comum
- A estabilidade dos laços independentes não garante a estabilidade do conjunto

Se tirarmos a interação entre as malhas

Pondo em manual o controlador 2

$$\Delta = 0$$

$$1 + G_{c_1}(s)G_{P_{11}}(s) = 0$$

Pondo em manual o controlador 1

$$\Delta = 0$$

$$1 + G_{c_2}(s)G_{P_{22}}(s) = 0$$

- Para que a interacção afecte a resposta das malhas esta deve atuar em ambos os sentidos, se alguma das duas FT entre malhas é zero

$$\Delta = 0$$

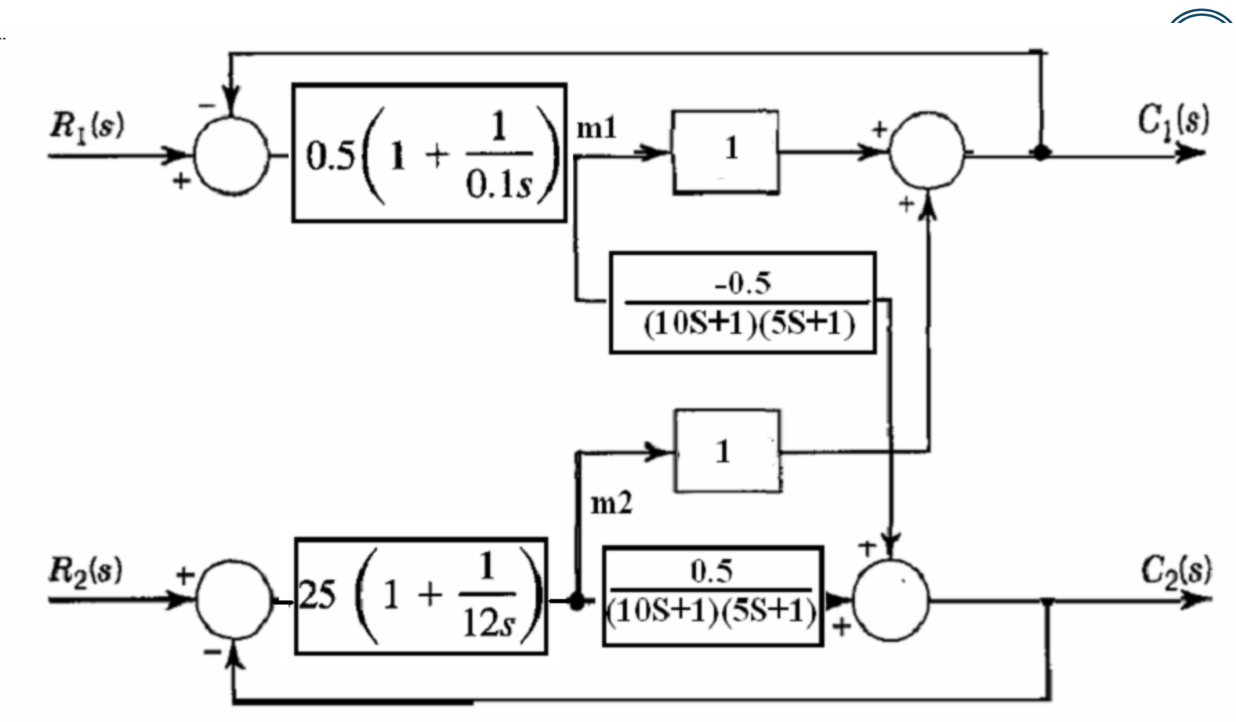
$$[1 + G_{c_1}(s)G_{P_{11}}(s)]\,[1 + G_{c_2}(s)G_{P_{22}}(s)] = 0$$

As raízes desta equação são quão mesmas as das duas anteriores

- Quando as malhas estão fechadas e em modo automáticos a estabilidade dependerá também dos ramos que unem as malhas

$$\Delta = [1 + G_{c_1}(s)G_{P_{11}}(s)][1 + G_{c_2}(s)G_{P_{22}}(s)] - G_{c_1}(s)G_{P_{12}}(s)G_{c_2}(s)G_{P_{21}}(s) = 0$$

EXEMPLO



Malha 1

$$1+0.5\left(1+\frac{1}{0.1S}\right)*1=0$$

$$1+0.5\left(\frac{0.1\mathrm{S}+1}{0.1\mathrm{S}}\right)=0$$

$$0.1S+0.05S+0.5=0$$

$$0.15S+0.5=0$$

$$S=-\frac{0.5}{0.15}=-3.33$$

Raiz negativa, malha estável

Malha 2

$$1+25\left(1+\frac{1}{12S}\right)*\frac{0.5}{(10S+1)(5S+1)}=0$$

$$1+25\left(\frac{12\mathrm{S}+1}{12\mathrm{S}}\right)*\frac{0.5}{(10S+1)(5S+1)}=0$$

$$12S(10S+1)(5S+1)+12.5*(12S+1)=0$$

$$600S^3+180S^2+12S+150S+12.5=0$$

$$600S^3+180S^2+162S+12.5=0$$

$$S=-0.0827$$

$$S=-0.1087\pm0.49j$$

Raízes negativas, laço estável

$$\Delta = [1 + G_{c_1}(s)G_{P_{11}}(s)][1 + G_{c_2}(s)G_{P_{22}}(s)] - G_{c_1}(s)G_{P_{12}}(s)G_{c_2}(s)G_{P_{21}}(s) = 0$$

$$\left(1+0.5\left(1+\frac{1}{0.1S}\right)\right)*\left(1+25\left(1+\frac{1}{12S}\right)*\frac{0.5}{(10S+1)(5S+1)}\right)-0.5\left(1+\frac{1}{0.1S}\right)*1*25\left(1+\frac{1}{12S}\right)*\frac{-0.5}{(10S+1)(5S+1)}=0$$

$$\frac{0.15S+0.5}{0.1S}*\frac{600S^3+180S^2+162S+12.5}{12S(10S+1)(5S+1)}-\frac{5.2(0.1S+1)(12S+1)}{S^2(10S+1)(5S+1)}=0$$

$$\frac{90S^4+327S^3+114.3S^2+82.87S+6.25}{1.2S^2(10S+1)(5S+1)}-\frac{5.2(0.1S+1)(12S+1)}{S^2(10S+1)(5S+1)}=0$$

$$4500S^8+17700S^7+10635S^6+5048.1S^5-2280.5S^4-518.8S^3-25.2S^2=0$$

Raízes da equação característica do sistema

0
0
-3.3388
-0.3820 + 0.6467i
-0.3820 - 0.6467i
0.3529 ← Mudança de sinais, (raiz positiva): sistema instável
-0.0917 + 0.0041i
-0.0917 - 0.0041i

Concluindo

A estabilidade das malhas independentes não garante a estabilidade do conjunto multivariável