

Departamento de Engenharia Química e de Petróleo – UFF

Transformada de Laplace Solução de Modelos Lineais

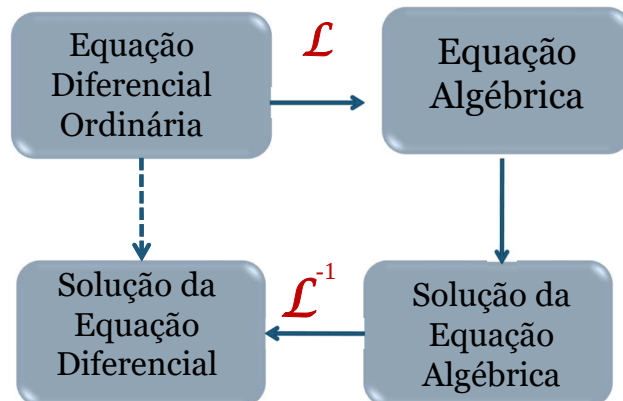
Profª Ninoska Bojorge

A Transformada de Laplace

EDO:

$$5 \frac{dy}{dt} + 4y = 2 \quad y(0) = 1$$

$$y(t) = 0,5 + 0,5e^{-0,8t}$$



Por que Transformada de Laplace?

- Encontrar a solução da equação diferencial usando álgebra.
- Relação com Transformada de Fourier, o que permite uma maneira fácil de caracterizar sistemas.
- Não há necessidade realizar uma operação de convolução entre o sinal de entrada e a resposta da solução da equação diferencial.
- Útil em sistemas de controle para múltiplos processos

A Transformada de Laplace

Definição: Dada uma função $f(t)$ definida no intervalo $[0, \infty)$ definimos a sua transformada de Laplace, $F(s)$, por

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

onde s é uma variável complexa $\rightarrow s = \sigma + j\omega$.

- $F(s)$ é a chamada transformada de Laplace de $f(t)$.
- $f(t)$ é uma função contínua num intervalo $[0, \infty)$
- $F(s)$ não contém nenhuma informação sobre $f(t)$ para $t < 0$.

A informação passada em $f(t)$ (para $t < 0$) é irrelevante.

A Transformada Inversa de Laplace

5

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

- t é uma variável real, s é uma variável complexa!
- A T. Inversa requer uma análise complexa para resolver
- Note que “transformada”: $f(t) \rightarrow F(s)$, onde t é integrada e s é uma variável
- E a inversa de $F(s) \rightarrow f(t)$, t é uma variável e s é integrada
- Assume $f(t) = 0$ para todo $t < 0$

Revisão de Variáveis Complexas e funções complexas

6

Teorema de Euler

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$$

Prova: Considere as expansões de séries de Taylor das funções

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$
$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$
$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$$\cos \theta + j \sin \theta =$$

Corolários

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{t=0}^{t=\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \mathcal{L}[1(t)] = \int_{t=0}^{t=\infty} 1(t)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_{t=0}^{t=\infty} 1(t)e^{-st} dt = \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-st} dt$$

$$= \left[\frac{-1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{-1}{s} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} - 1 \right] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[At^n e^{-at} 1(t)] = \frac{An!}{(s+a)^{n+1}}$$

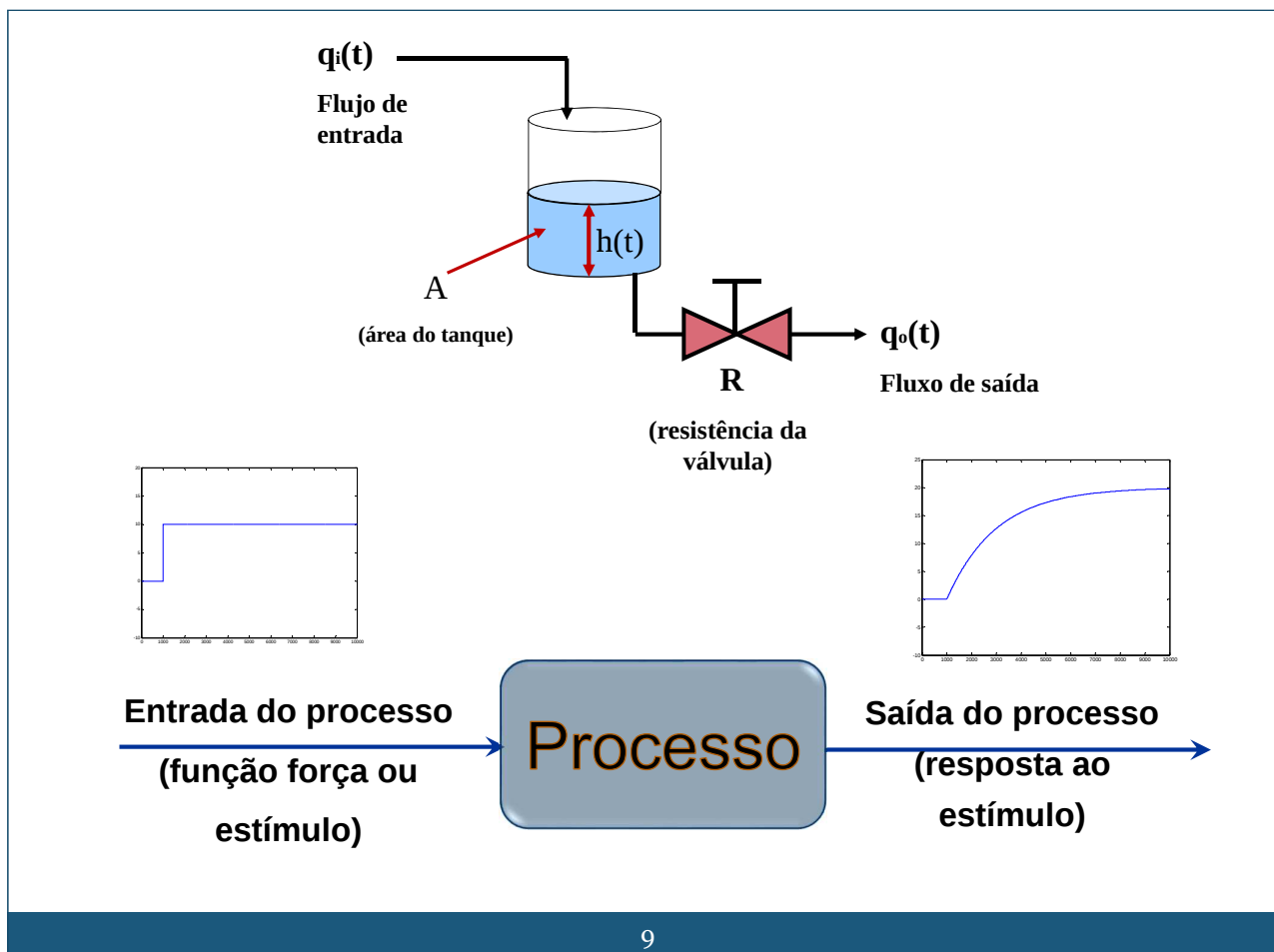
$$f(t) = A \cos(\omega t) 1(t),$$

$$\mathcal{L}[A \cos(\omega t) 1(t)] = \mathcal{L} \left[A \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} 1(t) \right]$$

$$= \mathcal{L} \left[A \frac{e^{j\omega t}}{2} 1(t) \right] + \mathcal{L} \left[A \frac{e^{-j\omega t}}{2} 1(t) \right]$$

$$= \frac{A}{2} \frac{1}{s - j\omega} + \frac{A}{2} \frac{1}{s + j\omega} = \frac{A}{2} \frac{(s + j\omega) + (s - j\omega)}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

$$= \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$



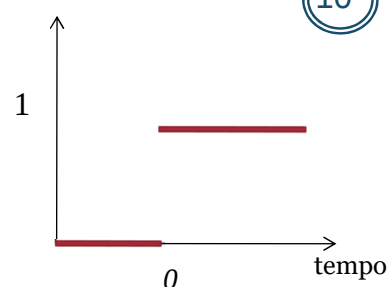
Funções de Transformadas de Laplace

10

1) Degrau unitário, $f(t)=1, t>0$.

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

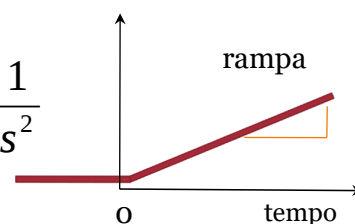
$$L[f(t)] = -\int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$



2) Rampa, $f(t)=t, t>0$.

$$L[t] = -\int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$



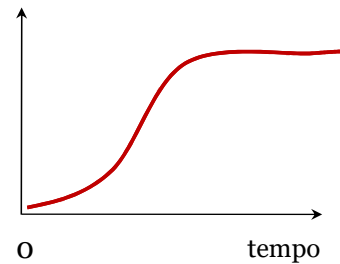
Transformadas de Laplace de algumas funções comuns:

11

3) Função exponencial, $f(t) = e^{at}$, $t > 0$.

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{Re}\{s\} > a$$

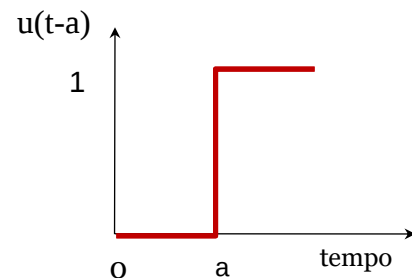
$$L[e^{-bt}] = \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-st} dt = -\frac{1}{s+b} e^{-(b+s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+b}$$



4) Função Heaviside

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

$$L\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$



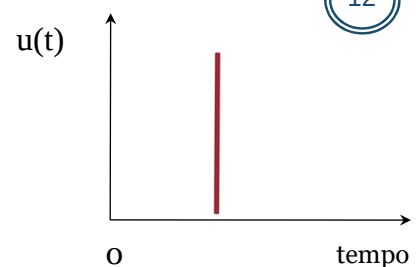
11

Transformadas de Laplace de algumas funções comuns:

12

5) Função impulso unitário, $f(t) = \delta(t)$

$$f(t) = \delta(t) = \lim_{t_w \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{para } t > t_w \\ 1/t_w & \text{para } t_w \geq t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$



$$L[\delta(t)] = \lim_{t_w \rightarrow 0} \int_0^{t_w} \frac{1}{t_w} e^{-st} dt = \lim_{t_w \rightarrow 0} \frac{1}{t_w s} (1 - e^{-st_w}) = 1$$

$$L\{f(t)\} = 1$$

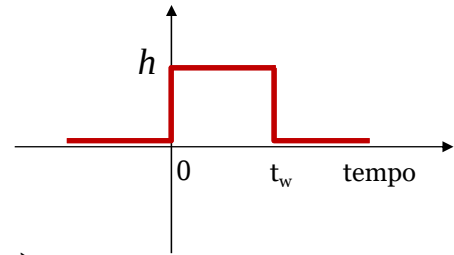
$$\left[L'Hospital : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t)}{g'(t)} \right]$$

Transformadas de Laplace de algumas funções comuns:

13

6) Função pulso retangular

$$U_{RP}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ h & \text{para } 0 \leq t < t_w \\ 0 & \text{para } t \geq t_w \end{cases}$$



$$L[P(t)] = -\int_0^{t_w} h e^{-st} dt = -\frac{h}{s} e^{-st} \Big|_0^{t_w} = \frac{h}{s} (1 - e^{-st_w})$$

$$U_{RP}(s) = \frac{h}{s} [1 - e^{-t_w s}]$$

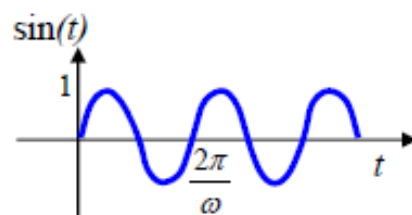
Transformadas de Laplace de algumas funções comuns:

14

6) Função trigonométrica

Identidade Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$



$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad \sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$L(\sin \omega t) = L\left(\frac{1}{2j} e^{j\omega t}\right) - L\left(\frac{1}{2j} e^{-j\omega t}\right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$L(\cos \omega t) = L\left(\frac{1}{2} e^{j\omega t}\right) + L\left(\frac{1}{2} e^{-j\omega t}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Table 3.1 Laplace Transforms for Various Time-Domain Functions^a

$f(t)$	$F(s)$
1. $\delta(t)$ (unit impulse)	1
2. $S(t)$ (unit step)	$\frac{1}{s}$
3. t (ramp)	$\frac{1}{s^2}$
4. t^{n-1}	$\frac{(n-1)!}{s^n}$
5. e^{-bt}	$\frac{1}{s+b}$
6. $\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{\tau s + 1}$
7. $\frac{t^{n-1} e^{-bt}}{(n-1)!}$ ($n > 0$)	$\frac{1}{(s+b)^n}$
8. $\frac{1}{\tau^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{(\tau s + 1)^n}$
9. $\frac{1}{b_1 - b_2} (e^{-b_2 t} - e^{-b_1 t})$	$\frac{1}{(s+b_1)(s+b_2)}$
10. $\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})$	$\frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$
11. $\frac{b_3 - b_1}{b_2 - b_1} e^{-b_1 t} + \frac{b_3 - b_2}{b_1 - b_2} e^{-b_2 t}$	$\frac{s + b_3}{(s+b_1)(s+b_2)}$
12. $\frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{1}{\tau_2 \tau_2} \frac{\tau_2 - \tau_3}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2}$	$\frac{\tau_3 s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$
13. $1 - e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{s(\tau s + 1)}$
14. $\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

Propriedades da Transformada de Laplace

16

- 1) Linearidade** Se c_1 e c_2 são constantes e $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são funções cujas transformadas de Laplace são, respectivamente, $F_1(s)$ e $F_2(s)$, então

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s).$$

Devido a esta propriedade, se diz que a transformada de Laplace é um **operador linear**.

ou Superposição

$$L[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

17

2) Transformada de Laplace das derivadas de uma função

A transformada de Laplace de uma derivada de 1ª ordem de uma função está dada por:

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$\therefore f(0)$ é o valor de $f(t)$ em $t=0$.

A transformada de Laplace da segunda derivada de uma função está dada por:

$$L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

18

Similarmente,

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

3) Transformada de Laplace de Integrais

$$L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

19

4) Teorema do valor final

Se $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existe, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

5) Teorema do valor inicial

O valor inicial $f(0)$ da função $f(t)$ cuja transformada de Laplace é $F(s)$:

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

20

6) Integral de convolução

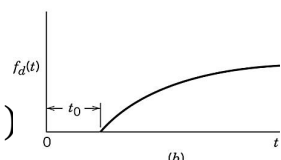
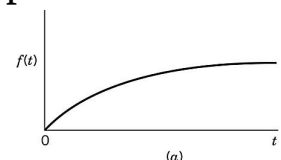
A operação $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ se conhece como a convolução de $f_1(t)$ e $f_2(t)$, e se denota como $f_1(t) * f_2(t)$.

A transformada de Laplace de esta operação está dada por

$$L\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s)$$

7) Tempo morto

$$\begin{aligned} f_d(t) = f(t-t_0)S(t-t_0) &\xrightarrow{L} F_d(s) = e^{-st_0} F(s) \\ F_d(s) = e^{-st_0} F(s) &\xrightarrow{L^{-1}} f_d(t) = f(t-t_0)S(t-t_0) \end{aligned}$$



Transformada de Laplace de algumas funções

21

Função constante: $f(t) = a$

$$F(s) = L(a) = \int_0^{\infty} a e^{-st} dt = -\frac{a}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{a}{s}\right) = \frac{a}{s}$$

Função exponencial: $f(t) = e^{-bt}$

$$\begin{aligned} F(s) = L(e^{-bt}) &= \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(b+s)t} dt \\ &= -\frac{1}{b+s} \left[e^{-(b+s)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+b} \end{aligned}$$

Transformada de Laplace de algumas funções

22

Derivadas e integrais

$$L\left(\frac{df}{dt}\right) = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} s dt + f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} = sF(s) - f(0)$$

$$L\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\left[\int_0^t f(t^*) dt^*\right] = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t^*) dt^*\right] e^{-st} dt = \frac{1}{s} F(s)$$

Solução de Equações Diferenciais

23

A aplicação da transformada de Laplace na solução de equações diferenciais lineais com coeficientes constantes é de grande importância nos problemas de sistemas de controle.

Dado que as condições iniciais estão incluídas na transformada de Laplace da equação diferencial, este método nós proporciona a solução completa (solução complementar + solução particular) da equação diferencial.

Transformada de Laplace de uma derivada

Note que:

Letra minusc. f indica a função de **tempo**.

Letra maiusc F indica uma função de **s**.

$$L\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

(Multiplique por s) =
(diferenciação escrita
no tempo)

Solução de Equações Diferenciais

25

Procedimento para resolver EDO usando a transformada de Laplace:

Suponha que se quer resolver a equação diferencial de segunda ordem

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = u(t)$$

com condições iniciais: $y(0) = a, \quad y'(0) = b,$

onde α, β, a e b são constantes.

Tomando a transformada de Laplace a ambos lados da equação e substituindo as condições iniciais, se obtém uma equação algébrica, onde se pode determinar

$$Y(s) = L\{y(t)\}.$$

A solução requerida obtém-se ao calcular a transformada inversa de Laplace ($\mathcal{L}^{-1}Y(s)$).

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

26

Considere que $F(s)$ está na forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}, \quad n > m$$

onde:

as raízes de $N(s)$ ($s = -z_1, -z_2, \dots, -z_m$) são os zeros de $F(s)$, e

as raízes de $D(s)$ ($s = -p_1, -p_2, \dots, -p_n$) são os pólos de $F(s)$.

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

27

a) $F(s)$ tem somente polos reais e distintos.

neste caso podemos escrever $F(s)$ como

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

onde a_k : coeficiente constante conhecido para o resíduo do polo em $s = -p_k$, e obtém-se mediante

$$a_k = [(s + p_k)F(s)]_{s=-p_k}$$

como
$$L^{-1}\left\{\frac{a_k}{s + p_k}\right\} = a_k e^{-p_k t}$$

então $f(t)$ estará dada neste caso por

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t}$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

28

b) $F(s)$ tem polos distintos, incluindo valores complexos.

Sejam $s = -p_1$ e $s = -p_2$ polos complexos conjugados de $F(s)$. A expansão em frações parciais de $F(s)$ estará dada por:

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s + p_1)(s + p_2)} + \frac{a_3}{s + p_3} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

Para obter α_1 e α_2 se multiplica a equação anterior por

$(s + p_1)(s + p_2)$ e se avalia em $s = -p_1$, de onde temos que

$$[\alpha_1 s + \alpha_2]_{s=-p_1} = F(s)(s + p_1)(s + p_2)|_{s=-p_1}$$

Obs: na equação anterior, se igualam as partes real e imaginária de ambos membros e se despejam os valores de α_1 e α_2

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

29

c) $F(s)$ tem polos repetidos.

Considere que $F(s)$ tem um pólo múltiplo em $s = -p_1$ de multiplicidade r .

A expansão em frações parciais de $F(s)$ estará dada por

$$F(s) = \frac{b_r}{(s + p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s + p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{b_1}{s + p_1} + \frac{a_{r+1}}{s + p_{r+1}} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

30

onde os coeficientes $b_r, b_{r-1}, \dots, b_1$ estão dados por

$$b_r = [F(s)(s + p_1)^r]_{s=-p_1}$$

$$b_{r-1} = \left\{ \frac{d}{ds} [F(s)(s + p_1)^r] \right\}_{s=-p_1}$$

$$\vdots$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{ds^j} [F(s)(s + p_1)^r] \right\}_{s=-p_1}$$

$$\vdots$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [F(s)(s + p_1)^r] \right\}_{s=-p_1}$$

Ex 1: Solução de EDO por transformada de Laplace

31

EDO: $5\frac{dy}{dt} + 4y = 2 \quad y(0) = 1$

1) Aplicando Transformada de Laplace

$$5[sY(s) - y(0)] + 4Y(s) = \frac{2}{s}$$

2) Substituindo $y(0)$ & rearranjando a equação, temos:

$$Y(s) = \frac{5s + 2}{s(5s + 4)} = \frac{s + 0.4}{s(s + 0.8)}$$

3) Transformada inversa de Laplace

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{s + 0.4}{s(s + 0.8)}\right]$$

Exemplo 1: Solução de EDO por transformada de Laplace

32

- Tabela 3.1 – (Sborg)

...continuação

$$L^{-1}\left[\frac{s + b_3}{(s + b_1)(s + b_2)}\right] = \frac{b_3 - b_1}{b_2 - b_1}e^{-b_1t} + \frac{b_3 - b_2}{b_1 - b_2}e^{-b_2t}$$

- Nosso problema

$$L^{-1}\left[\frac{s + 0.4}{(s + 0)(s + 0.8)}\right] = \frac{0.4 - 0}{0.8 - 0}e^{-0t} + \frac{0.4 - 0.8}{0 - 0.8}e^{-0.8t} = 0.5 + 0.5e^{-0.8t}$$

- Substituindo e simplificando

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{s + 0.4}{s(s + 0.8)}\right] \Rightarrow b_1 = 0 \quad b_2 = 0.8 \quad b_3 = 0.4$$

EXEMPLO 2: EXPANSÃO DE FRAÇÕES PARCIAIS

33

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Expande-se para um termo para cada fator no denominador.
Recombinar LD

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A(s+3)+B(s+2)}{(s+2)(s+3)}$$

Igualar em termos "s" e os termos constantes. Resolver.

$$A+B=1 \quad 3A+2B=1$$

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

Cada termo está em uma forma simples para que L^{-1} possa ser aplicada..

Outra aplicações de $\mathcal{L}()$

34

A. Teorema do valor final

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad \text{"offset"}$$

Exemplo: Resposta degrau

$$Y(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \frac{a}{s}$$

$$sY(s) = \frac{a}{\tau s + 1}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{a}{\tau s + 1} = a$$

offset (erro estado de equilíbrio) é a .

B. Teorema valor inicial $x(t \rightarrow 0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sx(s)]$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$$

$$\text{Para } Y(s) = \frac{4s+2}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$y(0) = 0 \quad \text{pelo teorema do valor inicial}$$

$$y(\infty) = \frac{1}{3} \quad \text{pelo teorema do valor final}$$

Ex 3: Aplicar Teoremas inicial e valor final a este exemplo

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+4)}$$

• Transformada de Laplace da função.

Valor Final:

• Aplicar o teorema do valor final

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] = \frac{2(0)}{(0)(0+2)(0+4)} = \frac{1}{4}$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

Valor Inicial:

• Aplicar o teorema do valor inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0} [f(t)] = \frac{2(\infty)}{(\infty)(\infty+2)(\infty+4)} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$$

Transformada de Laplace

37

Suponha que a função de transferência $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \frac{w}{s^2 + w^2}$ não se pode inverter explicitamente

Mas, si podemos descompor e encontrar valores de A_0 , A_1 , B

de modo que

$$\frac{A_1 s + A_0}{s^2 + w^2} + \frac{B}{\tau s + 1} = \frac{w}{s^2 + w^2} \cdot \frac{K}{\tau s + 1}$$

E obter sua inversão, usando a tabela de Laplace,

$\Rightarrow$ Expansão em Frações Parciais

Expansão em Frações Parciais

38

1. $D(s)$ tem como fatores reais e distintas $D(s) = \prod_{i=1}^n (s + b_i)$

expandir como
$$r(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s + b_i}$$

2. $D(s)$ parte real com fatores repetidos

expandido
$$D(s) = (s + b_i)^n$$

$$r(s) = \frac{\alpha_1}{s + b} + \frac{\alpha_2}{(s + b)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(s + b)^n}$$

Expansão em Frações Parciais

39

Expansão de Heaviside

Para uma função de forma racional

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + b_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s + b_i}$$

onde, constantes são dadas como:

$$\alpha_i = (s + b_i) \left. \frac{P(s)}{D(s)} \right|_{s=-b_i}$$

Expansão em Frações Parciais

40

Expansão de Heaviside

Para uma função racional com fatores repetidos

$$r(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s + b)^n} = \frac{\alpha_1}{s + b} + \frac{\alpha_2}{(s + b)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(s + b)^n}$$

Logo, as constantes são dadas por:

$$\alpha_n = (s + b_i)^n \left. \frac{P(s)}{D(s)} \right|_{s=-b_i}$$

$$\alpha_{n-1} = \frac{d}{ds} \left((s + b_i)^n \frac{P(s)}{D(s)} \right) \Big|_{s=-b_i}$$

$$\alpha_{n-1} = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left((s + b_i)^n \frac{P(s)}{D(s)} \right) \Big|_{s=-b_i}$$

Expansão em Frações Parciais

41

Exemplo 4 $r(s) = \frac{s+2}{s^3+10s^2+29s+20}$

Onde o polinômio $q(s) = s^3 + 10s^2 + 29s + 20$

tem raízes $s = -1, s = -4, s = -5$

o qual pode ser fatorado como:

$$q(s) = (s+1)(s+4)(s+5)$$

E por expansão em frações parciais temos:

$$r(s) = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+4} + \frac{\alpha_3}{s+5}$$

Expansão em Frações Parciais

42

$$r(s) = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+4} + \frac{\alpha_3}{s+5}$$

Continuação...

Logo, por Heaviside

$$\alpha_1 = \left. \frac{s+2}{(s+4)(s+5)} \right]_{s=-1} = \frac{1}{12}$$

$$\alpha_2 = \left. \frac{s+2}{(s+1)(s+5)} \right]_{s=-4} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_3 = \left. \frac{s+2}{(s+1)(s+4)} \right]_{s=-5} = -\frac{3}{4}$$

$r(s)$ será $r(s) = \frac{1}{12(s+1)} + \frac{2}{3(s+4)} - \frac{3}{4(s+5)}$

Por transformada inversa, resulta:

$$\mathcal{L}^{-1} [r(s)] = \frac{1}{12}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} - \frac{3}{4}e^{-5t}$$

Exemplo 5: Fatores repetidos

43

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{(s+2)^2} + \frac{\alpha_3}{s}$$

$$\alpha_2 = \left. \frac{s+1}{s} \right|_{s=-2} = \frac{1}{2} \quad \alpha_3 = \left. \frac{s+1}{(s+2)^2} \right|_{s=0} = \frac{1}{4} \quad \alpha_1 = -\frac{1}{4}$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{(s+2)^2} + \frac{\alpha_3}{s} = \frac{-1/4}{s+2} + \frac{1/2}{(s+2)^2} + \frac{1/4}{s}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}S(t)$$

Expansão em Frações Parciais

44

Exemplo 6 $r(s) = \frac{s+2}{s^3+9s^2+24s+16}$

o polinômio $q(s) = s^3 + 9s^2 + 24s + 16$

tem raízes $s = -1, s = -4, s = -4$

De modo que: $q(s) = (s+1)(s+4)^2$

por expansão parcial

$$r(s) = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+4} + \frac{\alpha_3}{(s+4)^2}$$

Expansão em Frações Parciais

45

contin.. $r(s) = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+4} + \frac{\alpha_3}{(s+4)^2}$

Por Heaviside

$$\alpha_1 = \left. \frac{s+2}{(s+4)^2} \right|_{s=-1} = \frac{1}{9} \quad \alpha_3 = \left. \frac{s+2}{(s+1)} \right|_{s=-4} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_2 = \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{s+2}{(s+1)} \right) \right|_{s=-4} = \left. -\frac{1}{(s+1)^2} \right|_{s=-4} = -\frac{1}{9}$$

Logo, $r(s)$:

$$r(s) = \frac{1}{9(s+1)} - \frac{1}{9(s+4)} + \frac{2}{3(s+4)^2}$$

Por transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}[r(s)] = \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{-4t} + \frac{2}{3}te^{-4t}$$

Exemplo 7: Expansão Fração Parcial

46

- Expansão em frações parciais

$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+4} = \frac{s+5}{(s+1)(s+4)} = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+4}$$

- Determinação dos coeficientes

$$\alpha_1 = \left. \frac{s+5}{s+4} \right|_{s=-1} = \frac{4}{3} \quad \alpha_2 = \left. \frac{s+5}{s+1} \right|_{s=-4} = -\frac{1}{3}$$

- Transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4/3}{s+1} - \frac{1/3}{s+4}\right] = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$$

Exemplo 8: Fator quadrático

47

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+4s+5)} =$$

$$s+1 = \alpha_1 s(s^2+4s+5) + \alpha_2 (s^2+4s+5) + (\alpha_3 s + \alpha_4)s^2$$

$$(\alpha_1 + \alpha_3)s^3 + (4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)s^2 + (5\alpha_1 + 4\alpha_2 - 1)s + (5\alpha_2 - 1) = 0$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+4s+5)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \frac{\alpha_3 s + \alpha_4}{s^2+4s+5} = \frac{0.04}{s} + \frac{0.2}{s^2} + \frac{-0.04s - 0.36}{s^2+4s+5}$$

$$\text{onde } \frac{-0.04s - 0.36}{s^2+4s+5} = \frac{-0.04(s+2)}{(s+2)^2+1} + \frac{-0.28}{(s+2)^2+1}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 0.04S(t) + 0.2t - 0.04e^{-2t} \cos t - 0.28e^{-2t} \sin t$$

Exemplo 9: Expansão em Frações Parciais

48

$$r(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

$$\text{o polinômio, } q(s) = s^2 + s + 1$$

$$\text{Raízes: } s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

Pode ser fatorado como:

$$q(s) = \left(s + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) \left(s + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)$$

Por frações parciais:

$$r(s) = \frac{\alpha_1}{s + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j} + \frac{\alpha_2}{s + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j}$$

$$r(s) = \frac{\alpha_1}{s + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j} + \frac{\alpha_2}{s + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j}$$

Continuação...

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(s + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \right) \frac{s+1}{s^2+s+1} \Bigg|_{s=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j} & \alpha_2 &= \left(s + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \right) \frac{s+1}{s^2+s+1} \Bigg|_{s=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j} \\ &= \frac{s+1}{\left(s + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \right)} \Bigg|_{s=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j} & &= \frac{s+1}{\left(s + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \right)} \Bigg|_{s=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}j & &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}j \end{aligned}$$

O que resulta:

$$r(s) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}j}{s + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}j}{s + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j}$$

Tomando transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}[r(s)] = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}j \right) e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}tj} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}j \right) e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}tj}$$

Expansão em Frações Parciais

50

Continuação...

A transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}[r(s)] = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}j \right) e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}tj} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}j \right) e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}tj}$$

Pode ser reordenada

$$\mathcal{L}^{-1}[r(s)] = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}tj} + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}tj}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}j \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}tj} - e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}tj}}{2} \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[r(s)] = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}tj} + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}tj}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}tj} - e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}tj}}{2j} \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[r(s)] = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$$

Exemplo 10: Expansão em Frações Parciais

51

$$r(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

o polinômio, $q(s) = s^2 + s + 1$

Raízes: $s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$

Pode ser fatorado como: $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$r(s) = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2+b^2} + \frac{Bb}{(s+a)^2+b^2}$$

Resolvendo para A e B,

$$r(s) = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2+b^2} + \frac{Bb}{(s+a)^2+b^2} = \frac{s+1}{(s+a)^2+b^2}$$

Expansão em Frações Parciais

52

Equações de potencia similar em s,

Continuação...

$$r(s) = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2+b^2} + \frac{Bb}{(s+a)^2+b^2} = \frac{s+1}{(s+a)^2+b^2}$$

temos

$$A = 1$$

$$Aa + Bb = 1$$

Por tanto,

$$B = \frac{1-a}{b} = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

temos

$$r(s) = \frac{(s+a)}{(s+a)^2+b^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

Tomando $\mathcal{L}^{-1}$

$$\mathcal{L}^{-1} [r(s)] = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$$

$$11) \quad F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Expansão frações parciais..
"veja as regras"

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$f(t) = [Ae^{-t} + Be^{-2t}]1(t)$$

$$f(t) = [2e^{-t} + (-1)e^{-2t}]1(t)$$

$$A: \quad (s+1) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = (s+1) \left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \right]$$

$$\frac{s+3}{(s+2)} = A + (s+1) \left[\frac{B}{s+2} \right] \quad A = \left[\frac{s+3}{(s+2)} \right]_{s=-1} \quad A = 2$$

$$B: \quad (s+2) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = (s+2) \left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \right]$$

$$\frac{s+3}{(s+1)} = (s+2) \left[\frac{A}{s+1} \right] + B \quad B = \left[\frac{s+3}{(s+1)} \right]_{s=-2} \quad B = -1$$

Transformada Inversa de Laplace

54

12)

$$F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)} = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = s + 2 + \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$f(t) = [\delta'(t) + 2\delta(t) + Ae^{-t} + Be^{-2t}]1(t)$$

A e B do mesmo modo como no problema anterior.

$$f(t) = [\delta'(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}]1(t)$$

Transformada Inversa de Laplace

$$13) \quad F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}, \quad s^2+2s+5 = (s+1-j2)(s+1+j2)$$

$$F(s) = \frac{2s+12}{(s+1-j2)(s+1+j2)} = \frac{A}{(s+1-j2)} + \frac{\bar{A}}{(s+1+j2)}$$

$$f(t) = \left[Ae^{-(1-j2)t} + \bar{A}e^{-(1+j2)t} \right] 1(t)$$

$$f(t) = \left[2.6926e^{-t} \left(e^{j(2t-1.1903)} + e^{-j(2t-1.1903)} \right) \right] 1(t)$$

$$f(t) = \left[5.3852e^{-t} \cos(2t-1.1903) \right] 1(t)$$

$$A = \left[\frac{2s+12}{s+1+j2} \right]_{s=-1-j2} = \frac{2(-1+j2)+12}{-1+j2+1+j2} = 1-2.5j = 2.6926e^{-1.1903j}$$

$$\bar{A} = 2.6926e^{1.1903j}$$

Transformada Inversa de Laplace

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$$

$$f(t) = \left[Ae^{-t} + Bte^{-t} + \frac{C}{2}t^2e^{-t} \right] 1(t) \quad f(t) = \left[2e^{-t} + t^2e^{-t} \right] 1(t)$$

$$(s+1)^3 \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = (s+1)^3 \left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3} \right]$$

$$s^2+2s+3 = (s+1)^2 A + (s+1)B + C$$

$$\left[s^2+2s+3 \right]_{s=-1} = \left[(s+1)^2 A + (s+1)B + C \right]_{s=-1} = C = 2$$

$$B = \left[\frac{d}{ds} [s^2+2s+3] \right]_{s=-1} = [2s+2]_{s=-1} = 0$$

$$A = \left[\frac{d^2}{ds^2} [s^2+2s+3] \right]_{s=-1} = \left[\frac{d}{ds} [2s^2+2] \right]_{s=-1} = 2$$

Expansão em Frações Parciais

57

Algoritmo geral para solução de EDOs $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

- Tomar Transformada Laplace de ambos os lados da EDO
- Determinar as raízes para $D(s)$
- Fatorar a equação polinomial característica
 - Encontrar as raízes (ex: Função “roots” ou “poles” no Matlab)
 - Identificar os fatores e multiplicidades
- Realizar expansão em frações parciais
- Invertir a Transf. de Laplace usando tabelas de Laplace

Expansão em Frações Parciais

58

Para uma função : $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

O polinômio $D(s)$ tem raízes do tipo:

✦ Raízes Reais

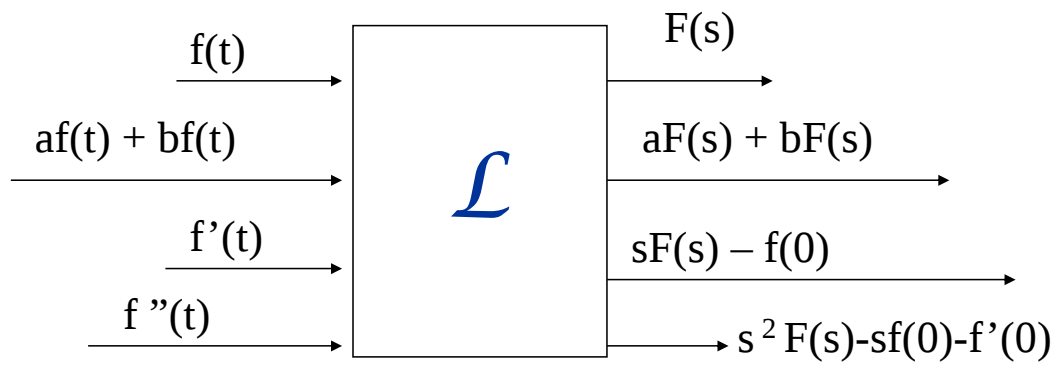
- $s = -b_i$ resulta termo exponencial
- $s = 0$ resulta termo constante

✦ Raízes Complexa

- $s = a_i \pm b_i j$ resulta resposta exponencial c/ peso senoidal
- $s = \pm b_i j$ resulta um sinal senoidal puro

Finalizando...

59



Transformada de Laplace