Departamento de Engenharia Química e de Petróleo – UFF
Disciplina: TEQ102- CONTROLE DE PROCESSOS

ESTABILIDADE
Método critério de Routh-Hurwitz
Método de Substituição direta
custo Método do lugar geométrico das raízes (*Root Locus*)

Prof[a] Ninoska Bojorge

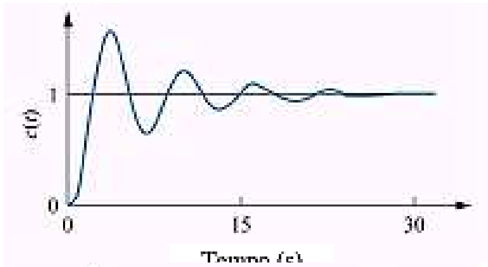
Introdução

- A estabilidade de um sistema linear malha fechada é determinada pela localização dos pólos da equação característica malha fechada no plano s;
- Se qualquer um destes pólos estiver no semi-plano direito do plano s, então, com o decorrer do tempo, eles darão origem ao modo dominante e a resposta transitória aumentará monotonamente ou oscilará com amplitude crescente;
- Critérios para a avaliação da estabilidade:
  - Método critério de Routh-Hurwitz
  - Método de Substituição Direta
  - Método do lugar geométrico das raízes (*Root Locus*)

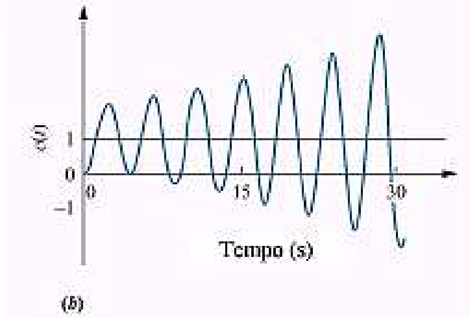
Introdução

- Pode-se definir basicamente 3 comportamentos diferentes em um sistema a partir do estado inicial:
  1) Decrescimento da resposta
  2) Crescimento da resposta
  3) Comportamento neutro

DECRESCIMENTO DA RESPOSTA: saída decai após aplicada uma entrada limitada
→ SISTEMA ESTÁVEL

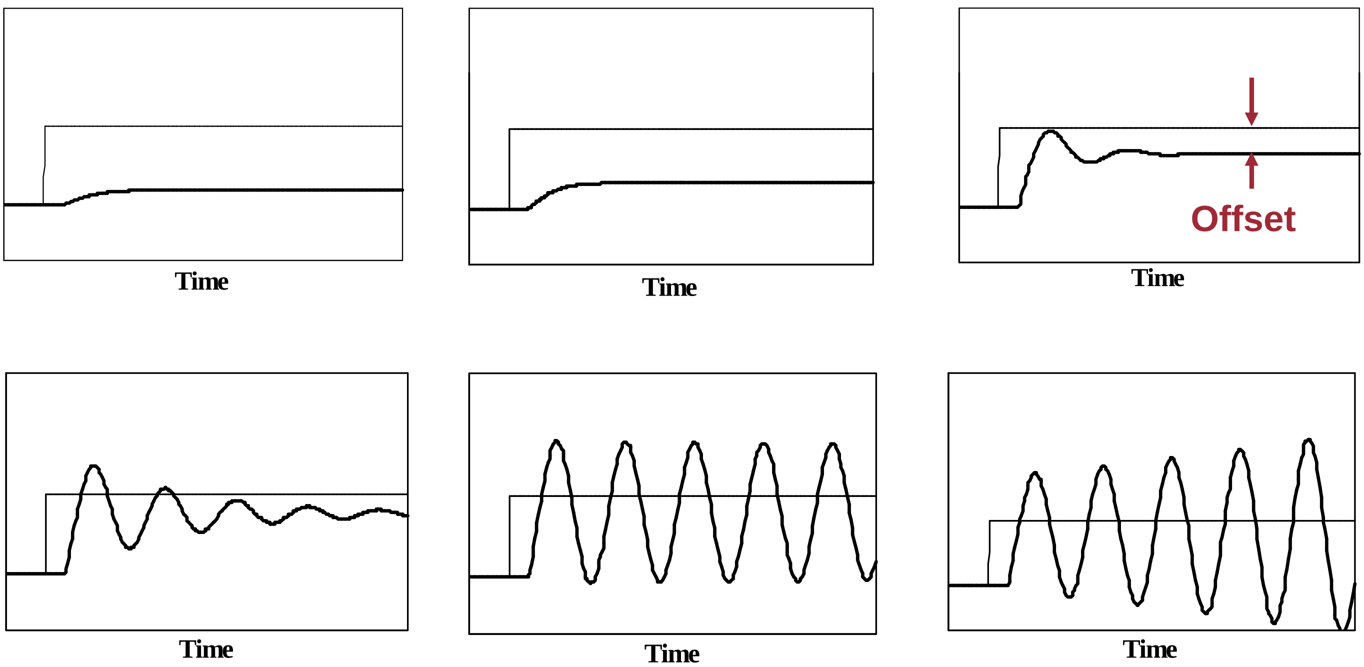


CRESCIMENTO DA RESPOSTA: saída cresce após uma entrada limitada
→SISTEMA INSTÁVEL



Dinâmicas do Processo FOPDT ao aumentar o Kc

Controlador : Proporcional → Offset

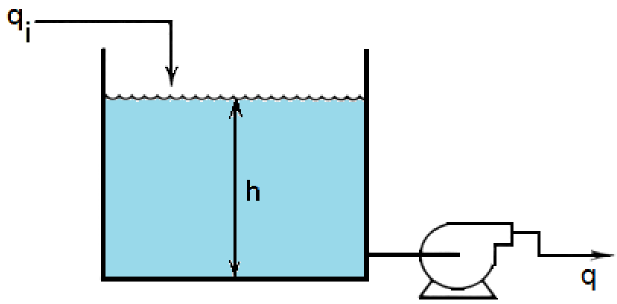


FOPDT: First Order Process Plus Dead Time

CRITÉRIO GERAL DE ESTABILIDADE

- ❖ Processo malha aberta estável (Auto-regulatório) :
  processo estável sem controle feedback
- ❖ Definição de Estabilidade:
  Um sistema linear irrestrito é dito ser estável se a resposta de saída é limitada para todas as entradas limitadas. Caso contrário, é dito ser instável.

Exemplo: Sistema de armazenamento de líquidos que não é de auto regulação

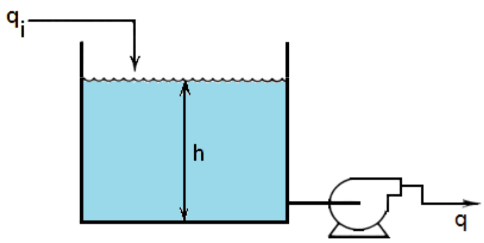


CRITÉRIO GERAL DE ESTABILIDADE

Exemplo: Tanque capacitivo puro

$$A\frac{dh}{dt} = q_i - q$$

$\therefore$ *q* é independente do *h*



Sistema de nível de líquido com uma bomba é um processo instável (ou não-auto-regulatório).

$$AsH(s) = Q_i(s) - Q(s)$$

$$H(S) = \frac{1}{A}\boxed{\frac{1}{s}}Q_i(s) - \frac{1}{A}\boxed{\frac{1}{s}}Q(s)$$

Processo de Integração

A função de transferência que relaciona o nível de liquido h com a vazão de entrada q_i é:

$$\frac{H'(s)}{Q_i'(s)} = G_P(s) = \frac{1}{As}$$

CRITÉRIO GERAL DE ESTABILIDADE

Para, o degrau de magnitude M_0 ,

$$H'(s) = \frac{M_0}{As^2}$$

Tomando a transformada inversa de Laplace da uma resposta transiente,

$$h'(t) = \frac{M_0}{A} t$$

Uma vez que esta resposta é ilimitada, podemos concluir que o sistema de armazenamento de líquidos é instável malha aberta (ou não-auto-regulatório) já que uma entrada limitada produz uma resposta sem limites.

No entanto, se a bomba no sistema do tanque fosse substituída por uma válvula, então o sistema de armazenamento seria de auto-regulação.

ESTABILIDADE MALHA FECHADA

O problema de controle envolve a consideração de estabilidade malha fechada.

Conceito Geral:

Estabilidade BIBO (Bounded Input-Bounded Output) :

Um sistema linear (sem restrições) é dito ser estável "se para todo sinal de amplitude limitada aplicado na entrada, o sinal de saída é também limitado.
Caso contrário, é instável, ou seja, a amplitude do sinal de saída tenderá a crescer indefinidamente com o passar do tempo."

Comentários:

- A estabilidade é muito mais fácil para provar que a instabilidade
- Isto é apenas um tipo de estabilidade

ESTABILIDADE MALHA FECHADA

Dinâmica da malha fechada

$$Y(s)=\frac{G_cG_vG_p}{1+\underbrace{G_cG_vG_pG_m}_{G_{OL}}}Y^*(s)+\frac{1}{1+G_cG_vG_pG_m}D(s)$$

- se G_{OL}(FTMA) é uma função racional, em seguida, as funções de malha fechada de transferência são funções racionais e tomam a forma

$$G(s)=\frac{H(s)}{Q(s)}=\frac{a_0+a_1s+...+a_ms^m}{b_0+b_1s+...+b_mS^m}$$

ou representando em função das FTs malha fechada, temos:

EQUAÇÃO CARACTERISTICA

$$C=\frac{K_mG_cG_vG_p}{1+G_{OL}}R+\frac{G_L}{1+G_{OL}}L$$

$$\therefore G_{OL}=G_cG_vG_pG_m$$

Para mudança no set-point, a equação acima se reduz a:

$$\frac{C}{R}=\frac{K_mG_cG_vG_p}{1+G_{OL}}=K'\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$\therefore$ $m \le n$: condição para a realizabilidade física

p_n: pólos das raízes da equação característica

Equação Característica:

$1 + G_{OL} = 0 \rightarrow$ desempenha um papel decisivo na determinação da estabilidade do sistema

EQUAÇÃO CARACTERISTICA

se $Q(s) = 1/s$ e não há pólos repetidos, em seguida:

$$C(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - p_n}$$

cuja solução é:

$$c(t) = A_0 + A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t) + \cdots + A_n \exp(p_n t)$$

- Assim, um dos pólos é um número real positivo c(t) é ilimitado.
- Se p_k é $a_k + jb_k$, uma parte real positiva e com a parte imaginário faz com que a resposta seja oscilatória, então o sistema é instável.

ESTABILIDADE MALHA FECHADA

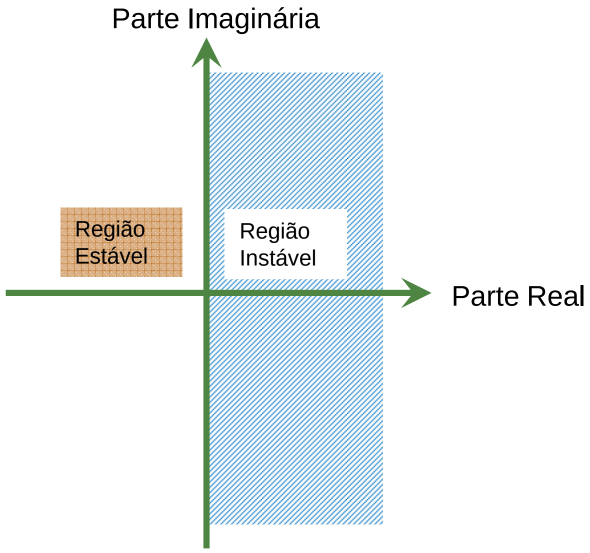
mais uma vez...

Critério BIBO (*Bounded Input, Bounded Output*):

- "Um sistema qualquer é estável se e somente se para toda e qualquer entrada limitada, a saída correspondente também for limitada";
- "Um sistema linear a malha fechada, invariante no tempo, a parâmetros concentrados é estável se e somente se todos os pólos de sua função de transferência de malha fechada estão no semi-plano esquerdo aberto do plano complexo s"

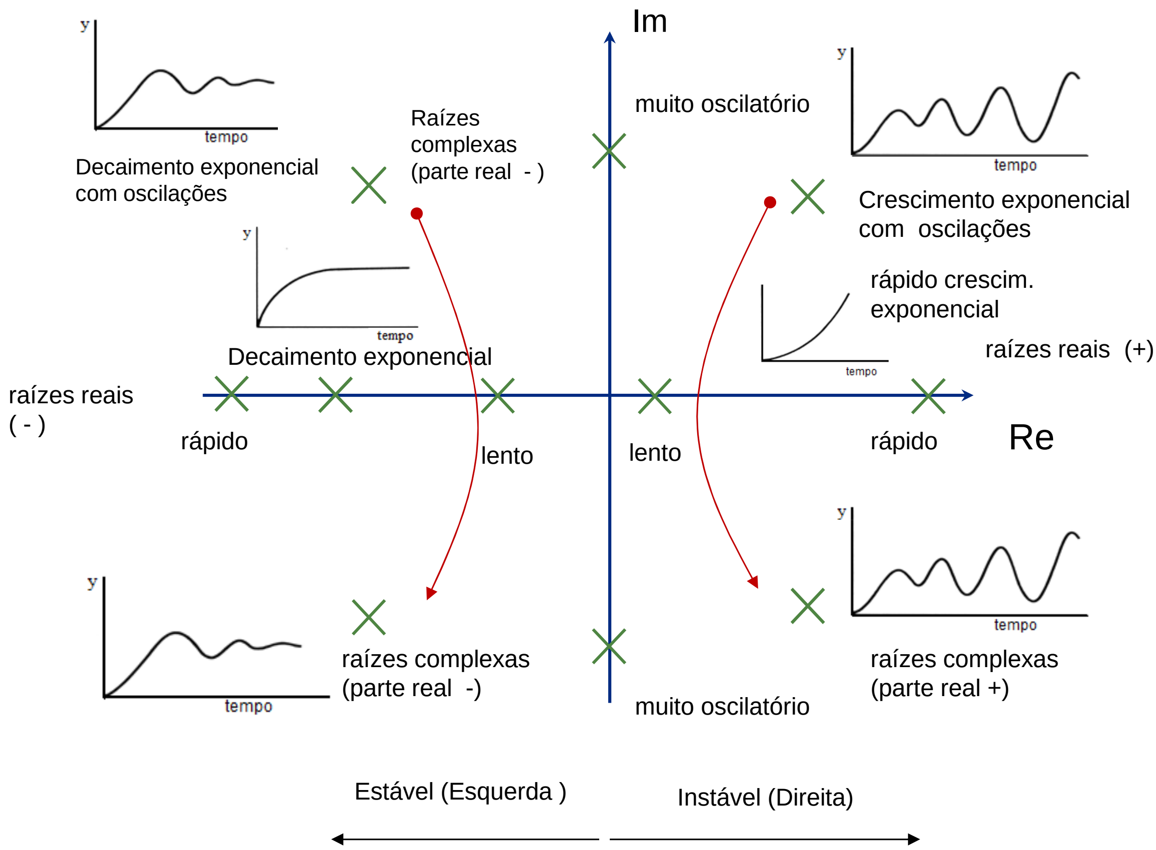
ESTABILIDADE MALHA FECHADA

Regiões de estabilidade no plano complexo das raízes da equação característica



Observação: A mesma equação característica ocorre tanto para as mudanças na carga e no *setpoint* desde o termo 1 + G_{OL}. Assim, se o sistema de malha fechada é estável para perturbações de carga, ele também será estável para mudanças de set-point.

Contribuições dos pólos na resposta malha fechada



Estabilidade BIBO: Critério de Routh-Hurwitz

ESTABILIDADE: G(s) é estável se todos os pólos tiverem parte real negativa

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

CONDIÇÃO NECESSÁRIA: os coeficientes do polinômio do denominador devem ser maiores que zero

NÃO É UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE!

Se os coeficientes do polinômio do denominador
• tiverem todos o mesmo sinal (todos positivos ou todos negativos) e estiverem todos presentes
É preciso fazer ANÁLISE DE CRITÉRIOS PARA ESTUDO DE ESTABILIDADE

CRITÉRIO DE HURWITZ– uma condição necessária (mas não suficiente) de estabilidade BIBO de um sistema linear causal é que **todos os coeficientes** do polinómio-denominador da FT sejam positivos (ou tenham o mesmo sinal)

Estabilidade BIBO: Critério de Routh-Hurwitz

Critério de Routh

- Informa sobre a estabilidade absoluta do sistema. Pode-se dizer se o sistema é estável, marginalmente estável ou instável.
- Seja um sistema em malha fechada com uma função de transferência que o representa:

$$\mathrm{FTMF(s)} = \mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{P(s)}}{\mathrm{Q(s)}}$$

$Q(s) = 1 + G_{OL}(s)$ = equação característica =
= denominador da malha fechada

Critério de estabilidade de Routh

Conceito: uma técnica analítica para determinar se as raízes do polinômio têm partes reais positivas

Método:

Equação Característica: $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$ (a_n>0)

1) Todos os coeficientes a_n , a_{n-1} , $\cdots a_0$ devem ser positivo.
(se qq coeficiente é negativo ou zero, então o sistema é instável.)

2) Construia a matriz de Routh

$$
\begin{array}{lllll}
\textit{Fila} & & & & \\
1 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
2 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-3} & \cdots \\
3 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
4 & c_1 & c_2 & \cdots & \\
\vdots & & & & \\
n+1 & z_1 & & &
\end{array}
$$

onde, n é a ordem da equação característica

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \cdots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}, \ \cdots$$

Todos os elementos da coluna à esquerda da matriz de Routh são positivos

⇒ só será válida se a equação característica é polinomial de s (sem atraso).

⇒ se o sistema contém atrasos usar a aproximação de Padé.

Nota: A análise da estabilidade do sistema contendo os atrasos serão tratados na análise de frequência.

.

Estabilidade BIBO: Critério de Routh-Hurwitz

Critério de Routh

- O critério de R-H consiste em escrever a equação característica sob a forma de um arranjo.
- O número de trocas de sinal na primeira coluna do arranjo fornece o número de pólos no semi-plano direito $\rightarrow$ o sistema é estável se a primeira coluna for composta apenas de números positivos ou negativos.
- Ex.: FTMF(s) = G(s) = N(s) / D(s)

  $[a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0]$

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{N(s)}{a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}} \longrightarrow C(s)$$

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Estabilidade BIBO: Critério de Routh-Hurwitz

Critério de Routh

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\begin{array}{l|lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} \qquad b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} \qquad b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1} \qquad c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1} \qquad d_2 = \frac{c_1b_3 - b_1c_3}{c_1}$$

- O número de raízes da equação característica com partes real positiva é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da 1ª coluna da tabela

Exemplo

Determinar a estabilidade de um sistema que tem a equação característica:

$$s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 1 = 0$$

Solução

Como o termo s está faltando, o seu coeficiente é zero. Assim, o sistema é instável. Lembre-se que uma condição necessária para a estabilidade é que todos os coeficientes da equação característica deve ser positivo.

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH (cont)

Exemplo 2: Indique quantos pólos fora do semiplano esquerdo tem o seguinte polinômio:

$s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2\ s^3 + s^2 + 4s + 4$

Solução:

- Repare que o polinômio atende à condição necessária
- usando o Matlab, obtém-se os seguintes pólos:

Command Window

```
>> roots([1 4 3 2 1 4 4])

ans =

  -3.2644
   0.6797 + 0.7488i
   0.6797 - 0.7488i
  -0.6046 + 0.9935i
  -0.6046 - 0.9935i
  -0.8858

>> |
```

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH (cont)

Exemplo 2: Indique quantos pólos fora do semiplano esquerdo tem o seguinte polinômio:

$s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2\,s^3 + s^2 + 4s + 4$

Solução:

o arranjo triangular de Routh assume a forma:

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^6 & 1 & 3 & 1 & 4 \\
s^5 & 4 & 2 & 4 & 0 \\
s^4 & 2{,}5 & 0 & 4 & 0 \\
s^3 & 2 & -2{,}4 & 0 & 0 \\
s^2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\
s^1 & \frac{-76}{15} & 0 & 0 & 0 \\
s^0 & 4 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$b_1 = \frac{(4)(3)-(1)(2)}{4} \qquad b_2 = \frac{(4)(1)-(1)(4)}{4} \qquad b_3 = \frac{(4)(4)-(1)(0)}{4}$$

$$c_1 = \frac{(2{,}5)(2)-(4)(0)}{2{,}5} \qquad c_2 = \frac{(2{,}5)(4)-(4)(4)}{2{,}5} \qquad c_3 = \frac{(2{,}5)(0)-(4)(0)}{2{,}5}$$

... contin.

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH (cont)

Exemplo 2: Indique quantos pólos fora do semiplano esquerdo tem o seguinte polinômio:

$s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2\,s^3 + s^2 + 4s + 4$

Solução:

o arranjo triangular de Routh assume a forma:

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & s^6 & 1 & 3 & 1 & 4 \\
 & s^5 & 4 & 2 & 4 & 0 \\
 & s^4 & 2{,}5 & 0 & 4 & 0 \\
 & s^3 & 2 & -2{,}4 & 0 & 0 \\
+ & s^2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\
- & s^1 & \frac{-76}{15} & 0 & 0 & 0 \\
+ & s^0 & 4 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

De fato, o critério de Routh indica a existência de 2 pólos fora do semiplano esquerdo.

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH (cont)

Observações:

- qualquer linha pode ser multiplicada por uma constante positiva apropriada, sem alterar os cálculos para as linhas seguintes.
- as 2 últimas linhas sempre terão um único elemento diferente de zero.

Casos Especiais

1) Linha com primeiro elemento igual a zero
   - substitua este elemento por um ε > 0 e prossiga na construção do arranjo.
   - Na análise de estabilidade, faça ε→0.

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH (cont)

Casos Especiais ... (Cont)

2) Linha com todos os elementos iguais a zero
   - este caso ocorre quando há raízes complexas conjugadas que são espelhos em relação ao eixo imaginário, ou seja, têm a parte real idêntica em valor absoluto e a mesma parte imaginária.
   - seja *i* o índice da linha com elementos todos nulos. Neste caso, tome a linha que a antecede, cujo índice é *i*+1 e com coeficientes *dj*, e defina o seguinte polinômio:

$$p(s) = d_1 s^{i+1} + d_2 s^{i-1} + d_3 s^{i-3} + \cdots$$

   - Agora, substitua a linha nula pelos coeficientes da derivada deste polinômio e prossiga na construção do arranjo de Routh.
   - Cuidado: neste caso especial, após concluir a análise do arranjo de Routh, é necessário analisar as raízes do polinômio acima, pois elas também serão raízes da equação característica original.

Método Substituição Direta

- **Conceito**:

Substituindo s = jw → na equação característica e encontrar uma unidade de estabilidade, tais como o valor máximo de Kc (K_{CM}).

Quanto mais o ganho Kc aumenta, as raízes da equação característica cruzam o eixo imaginário quando Kc = K_{CM}.

Exemplo

Use o método de substituição direta para determinar K_{CM} para o sistema com a equação característica dada por :

$$10s^3 + 17s^2 + 8s + 1 + K_c = 0 \qquad (8)$$

Solução

Substituia $s = j\omega$ e $K_c = K_{cm}$ na Eq. 8:

$$-10j\omega^3 - 17\omega^2 + 8j\omega + 1 + K_{cm} = 0$$

ou (9)

$$\left(1 + K_{cm} - 17\omega^2\right) + j\left(8\omega - 10\omega^3\right) = 0$$

A equação (9) é satisfeita se ambas as partes real e imaginária de (9) são identicamente nula:

$$1 + K_{cm} - 17\omega^2 = 0$$

$$8\omega - 10\omega^3 = \omega\left(8 - 10\omega^2\right) = 0$$

Assim,

$$\omega^2 = 0.8 \Rightarrow \omega = \pm 0.894$$

e por tanto,

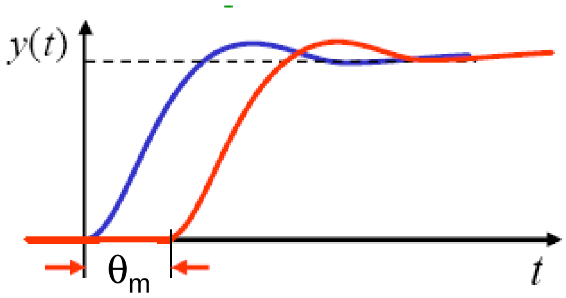
$$K_{cm} = 12.6$$

- Assim, conclui-se que K_c < 12.6 para estabilidade.
- ω = ±0,894 indica que o limite de estabilidade (onde K_c = K_{cm} = 12,6), uma oscilação sustenido acontece, com uma frequência de ω = 0,894 radians/min se a constante de tempo tem unidades de minutos.

  (Lembre-se que um par de raízes complexas no eixo imaginário, resulta em uma oscilação não amortecida de frequência ω.)
- O período correspondente P é $P = 2\pi/0.894 = 7.03$ min.

Tempo Morto, θ_m

- Presente em grande parte dos processos;
- Pode provocar problemas de instabilidade;
- Exemplo: sistema de nível
  - Considerando como entrada a percentagem de abertura na válvula v_1, quando ocorre uma mudança na mesma, a vazão de entrada do tanque só variará algum tempo depois, dependendo da distância da válvula da entrada de líquido no tanque;
  - Chamado também de atraso de transporte;
  - Por exemplo, se a válvula está localizada a 20 metros da entrada do tanque e a velocidade do líquido na tubulação for de 10 metros por segundo, o tempo morto, θ_m , do processo será de 2 segundos.



Tempo Morto

- Função de Transferência: $G(s)= e^{-\theta s}$
- **Aproximação de Padé**: aproxima o atraso ou tempo morto por uma função racional:

$$e^{-\theta s} = \frac{1 - \frac{\theta s}{2} + \frac{(\theta s)^2}{8} - \frac{(\theta s)^3}{48} + \dots}{1 + \frac{\theta s}{2} + \frac{(\theta s)^2}{8} + \frac{(\theta s)^3}{48} + \cdots}$$

Aproximação de Padé , primeira ordem :

$$e^{-\theta s} = \frac{1 - \frac{\theta s}{2}}{1 + \frac{\theta s}{2}} = \frac{2 - \theta s}{2 + \theta s}$$

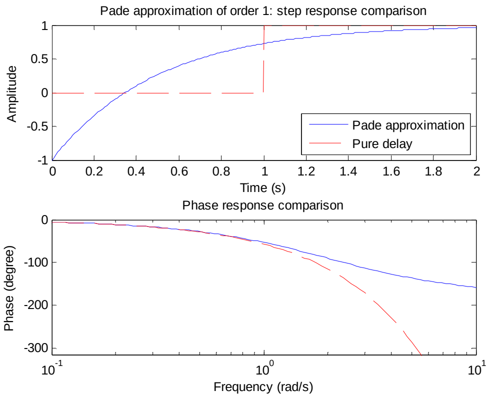
Aproximação de Padé , segunda ordem :

$$e^{-\theta s} = \frac{\theta^2 s^2 - 6\theta s + 12}{\theta^2 s^2 + 6\theta s + 12}$$

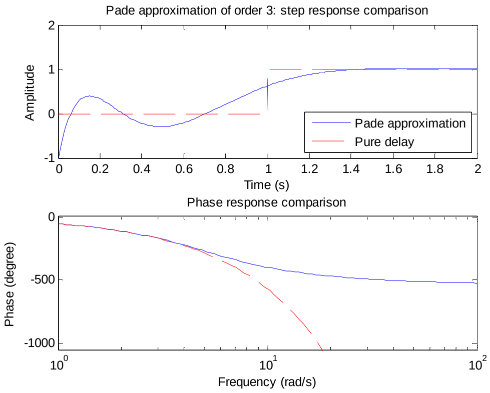
Tempo Morto Função de Transferência: $G(s)= e^{-\theta s}$

No Matlab: pade(θ ,n).

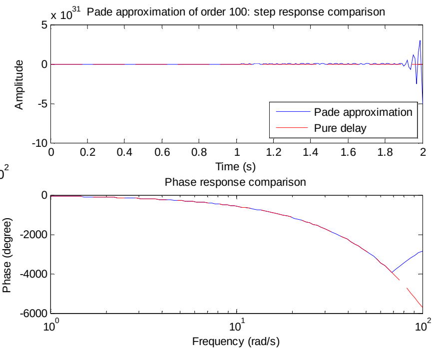
Ex: θ =1, n=1



Ex: θ =1, n=3



Ex: θ =1, n=100



Tempo Morto

Processos com tempo morto são mais difíceis de controlar porque a resposta não contém informação sobre eventos correntes.

Aproximação de Padé n=1, 2, 3

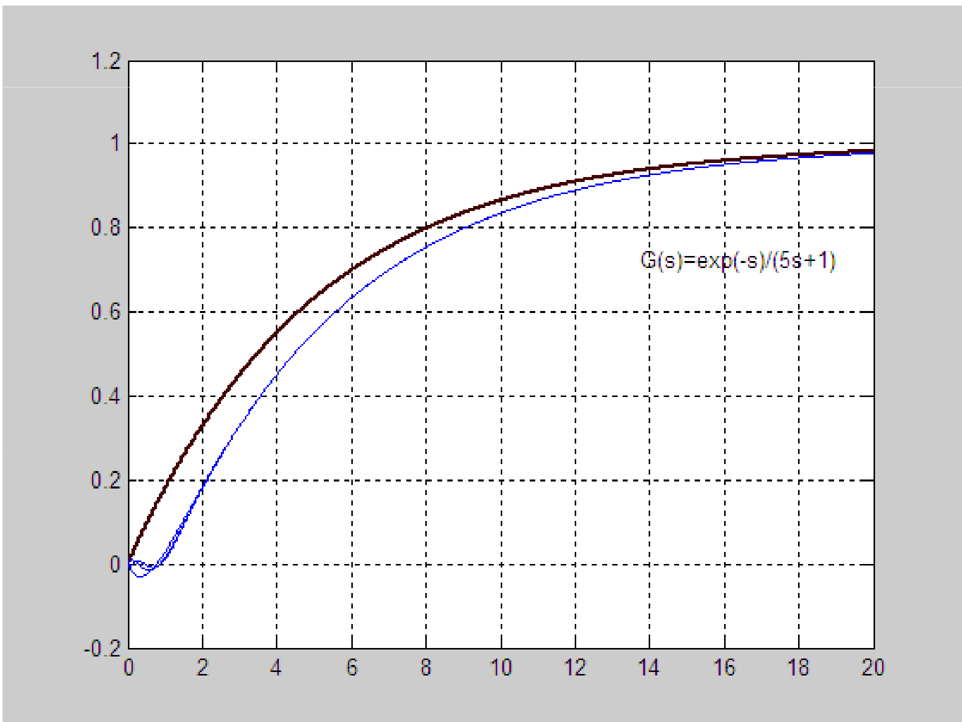


Diagrama de Lugar das Raízes

No projeto e análise de sistemas de controle, é instrutivo saber como as raízes da equação característica mudar quando um parâmetro do sistema particular, como mudanças ganho do controlador.

O diagrama do lugar das raízes fornece uma exibição gráfica conveniente desta informação.

Exemplo

Considere um sistema de controle *feedback* que tem a seguinte função de transferência malha aberta.

$$G_{OL}(s) = \frac{2K_c}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Plote o diagrama lugar das raízes para $0 \le K_c \le 40$

Solução: A Eq. Caract.: $(s + 1)(s + 2)(s + 3) + 2K_c = 0$.

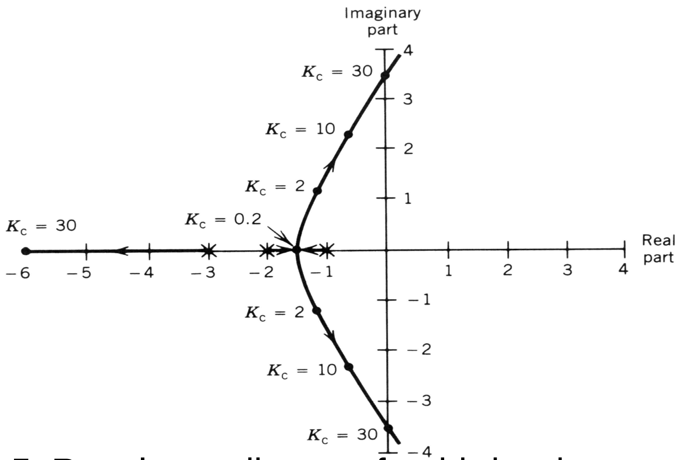


Figure 11.5. Root locus diagram for third-order system (Seborg).

A partir do diagrama acima lugar das raízes:

- O sistema em malha fechada é subamortecido para $K_c > 0{,}2$.
- O sistema de malha fechada é instável para $K_c > 30$.

Desvantagem da análise do lugar das raízes

- não consegue lidar com atraso de tempo. Assim, usa-se a aproximação de Padé.
- requer soluções iterativa da eq. característica não linear e não racional (complexo!).

Root Locus = *Lugar das Raízes*

➢ *Root Locus – método do* ***Lugar Geométrico*** **das Raízes – diagrama de Evans (Evans –** 1948, 1950)

Quais raízes?

- Do polinômio denominador da função de transferência em FTMF
  - Como função dos pólos e dos zeros da FTMA (malha aberta).
  - Sem fatorizar o polinômio denominador

O que é?

– Representação gráfica da localização dos pólos de um sistema em malha fechada como função de um parâmetro do sistema

- Usualmente, este parâmetro é um ganho da malha aberta

Para que serve ?

- Para apoio à síntese de controladores
- Suporte à avaliação das características da resposta no tempo do sistema em malha fechada como função da variação de parâmetros

Regras para a construção *Lugar das Raízes*

Dada a seguinte Função de Transferência:

$$KG(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

Esboce o Diagrama de lugar geométrico das raízes de 1 + KG (s) = 0 e calcular o valor de K, que irá originar um comportamento segunda ordem "dominante" com uma fator de amortecimento, $\zeta = 0{,}7$.

Solução: Observe que temos de modo genérico uma FT:

$$KG(s)H(s) = K\frac{N(s)}{D(s)}$$

Onde N(s) : polinômio – numerador de "s" e de grau m, raízes → zeros
D(s): polinômio – denominador de "s" de grau n, , raízes →polos
ou seja, temos n = 3 e m = 0.
Malha aberta, zero: nenhum
Pólos da malha aberta: s = 0, -2, -4

Regras para a construção *Lugar das Raízes*

Regra 1: Ponto inicial do Lugar das Raízes iniciam a partir de K = 0 nos pólos FTMA

Regra 2: Ponto final de chegada do Lugar das Raízes qdo $K \rightarrow \infty$

Quando $K \rightarrow \infty$ $\boxed{G(s)H(s) \rightarrow 0}$

para ser satisfeita a condição

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = \frac{N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)} \rightarrow 0$$

$s \rightarrow \{zeros\ de\ N_G(s)N_H(s)\}$

- m zeros
- m partes do root-locus tendem para os zeros da f.t.m.a.

$s \rightarrow \infty$

- n-m partes do root-locus tendem para infinito

Estes n-m partes tendem para infinito segundo assíntotas

Regra 3: O número de pólos é 3, como n = 3

Regra 4: Simetria do diagrama em relação ao eixo real

Regra 5: Existem (3 - 0) = 3 assíntotas. Os ângulos das assimptotas são dadas por:

$$\theta_j = \frac{(2j+1)\pi}{3-0} \qquad ; j = 0,1,2$$

$$= \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

i.e. $\theta_j = 60°, 180°, 300° (-60°)$

REGRA 6 – Pontos de entrada e de saída do eixo real

Ponto de entrada no eixo real = ***break-in point***

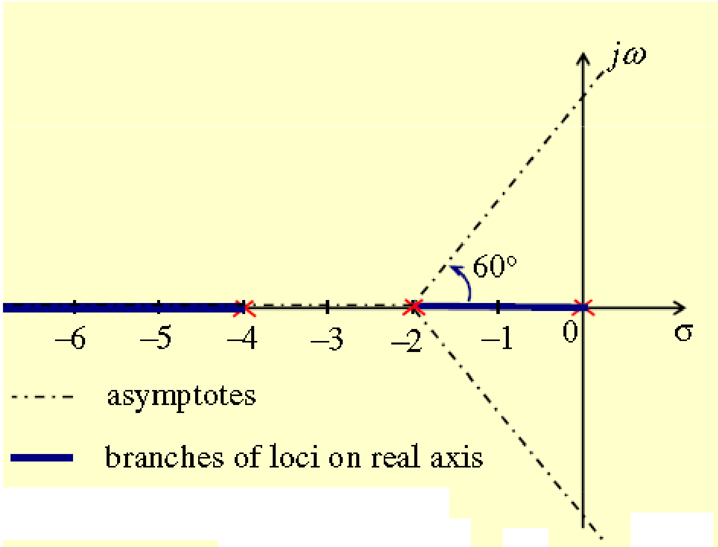
Ponto de saída do eixo real = ***breakaway point***

O ponto de interseção das assíntotas é

$$\sigma_c = \frac{\sum OL\_poles - \sum OL\_zeros}{n-m}$$

$$= \frac{(0-2-4)-(-0)}{3-0} = -2.0$$

REGRA 8 – Comportamento assintótico



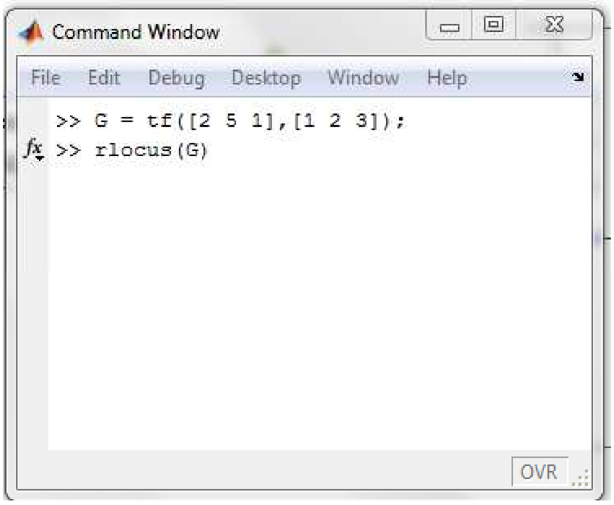
Plotando Lugar das raízes (rlocus) no Matlab

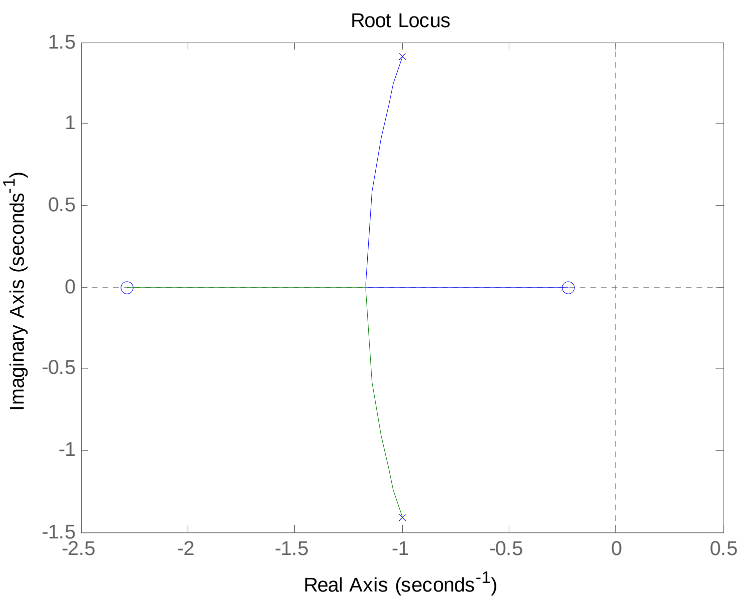
Exemplo:

$$G(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{2s^2 + 2s + 3}$$

Sintaxe:

rlocus(sys)
rlocus(sys1,sys2,...)
[r,k] = rlocus(sys)
r = rlocus(sys,k)





FLUXOGRAMA PARA A ANÁLISE DE ESTABILIDADE MALHA FECHADA