

Margem de Ganho e Margem de Fase

Diagrama de Nichols

custo

Prof^a Ninoska Bojorge

Critério de Estabilidade de Nyquist

- Desenvolvido por Harry Nyquist (1932) nos laboratórios Bell, estabelecendo que a representação digital de um sinal analógico seria funcionalmente idêntico à forma de onda original se a taxa de amostragem fosse pelo menos duas vezes a maior frequência presente na forma de onda analógica.
- Se baseia na teoria de variáveis complexas representadas na forma polar , o qual não será abordado neste curso.
- **Fundamento do argumento**

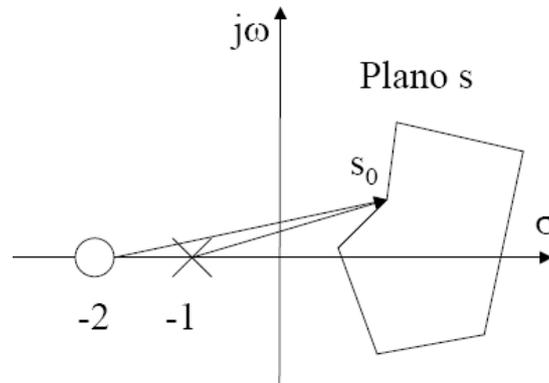
Utilizado para estabelecer relações fundamentais entre a resposta em frequência do sistema em malha aberta com a estabilidade do sistema em malha fechada.

- Não necessita do conhecimento explícito da função de transferência do sistema em malha aberta.
- Estabilidade absoluta e relativa do sistema operando em malha fechada.

Critério de Estabilidade de Nyquist

- Princípio do Argumento - Exemplo:

$$G(s) = \frac{(s + 2)}{(s + 1)}$$



5

Critério de Estabilidade de Nyquist

$$|G(s_o)| = \frac{\sqrt{(2 + \text{Re}(s_o))^2 + (\text{Im}(s_o))^2}}{\sqrt{(1 + \text{Re}(s_o))^2 + (\text{Im}(s_o))^2}}$$

$$\theta_{s_o} = \theta_z - \theta_p$$

$$\theta_{s_o} = \text{arc tan} \left(\frac{\text{Im}(s_o)}{(2 + \text{Re}(s_o))} \right) - \text{arc tan} \left(\frac{\text{Im}(s_o)}{(1 + \text{Re}(s_o))} \right)$$

6

- Consideremos o diagrama polar de uma função de transferência geral da seguinte forma

$$F(s) = \frac{k_0 \prod_{i=0}^m (\alpha_i s + 1)}{s^l \prod_{i=0}^n (\tau_i s + 1)}$$

1- Para baixas frequências, $\omega \rightarrow 0$. Depende do número de pólos em $\omega=0$ de $F(s)$, $s=j\omega$. Assim, se

- $l=0$, o diagrama começa no valor real $\lim_{\omega \rightarrow 0} F(j\omega) = k_0$, com a fase de k_0 (0 ou π).
- $l \geq 1$, o diagrama começa em infinito com fase $-l \pi / 2$ rad.

- Consideremos o diagrama polar de uma função de transferência geral da seguinte forma

$$F(s) = \frac{k_0 \prod_{i=0}^m (\alpha_i s + 1)}{s^l \prod_{i=0}^n (\tau_i s + 1)}$$

1- Para baixas frequências, $\omega \rightarrow 0$. Depende do número de pólos em $\omega=0$ de $F(s)$, $s=j\omega$. Assim, se

- $l=0$, o diagrama começa no valor real $\lim_{\omega \rightarrow 0} F(j\omega) = k_0$, com a fase de k_0 (0 ou π).
- $l \geq 1$, o diagrama começa em infinito com fase $-l \pi / 2$ rad.

Como traçar Diagramas Polares

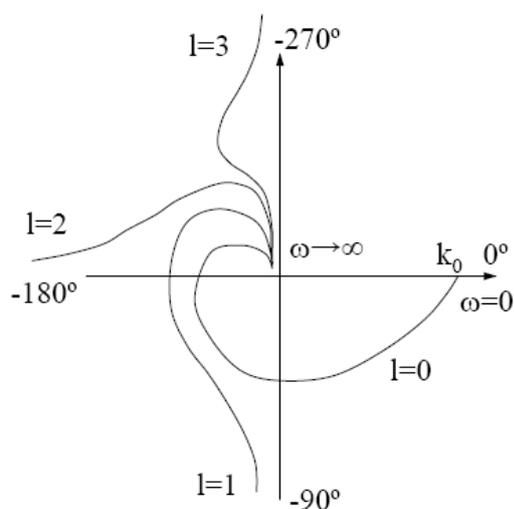
- Consideremos o diagrama polar de uma função de transferência geral da seguinte forma

$$F(s) = \frac{k_0 \prod_{i=0}^m (\alpha_i s + 1)}{s^l \prod_{i=0}^n (\tau_i s + 1)}$$

- Para frequências entre $]0, +\infty[$, o diagrama coincide com a representação polar do diagrama de Bode.
- Para frequências entre $] -\infty, 0[$, o diagrama é o simétrico do diagrama para $]0, +\infty[$. $Im(G(j\omega)) = -Im(G(-j\omega))$.
- Extremo para altas frequências, $\omega \rightarrow \infty$. Para funções de transferência estritamente próprias, o diagrama termina na origem, com uma fase φ dada por $\varphi = -(n+l-m)\pi/2$.

9

Como traçar diagramas polares



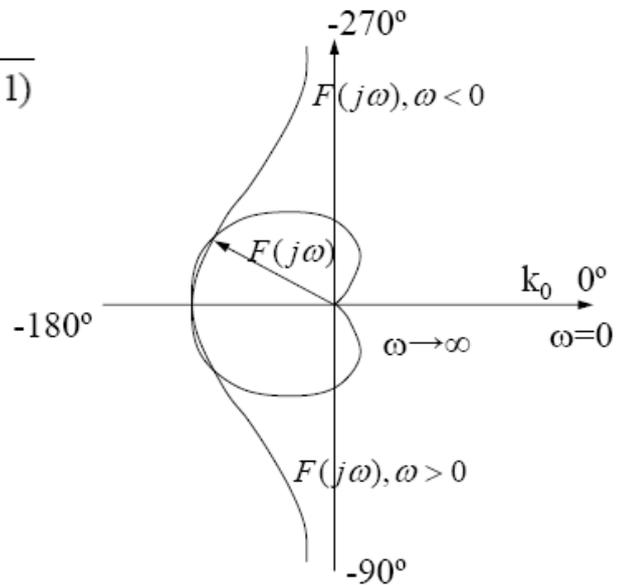
Esboço do Diagrama polar para número de pólos na origem variável ($l=0, 1, 2, 3$) mas para o mesmo grau relativo $n - m = cte$.

10

Como traçar diagramas de polares

Exemplo com um pólo na origem ($l=1$) e grau relativo 4 ($n - m = 4$):
Diagrama polar para

$$F(s) = \frac{k_0}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$



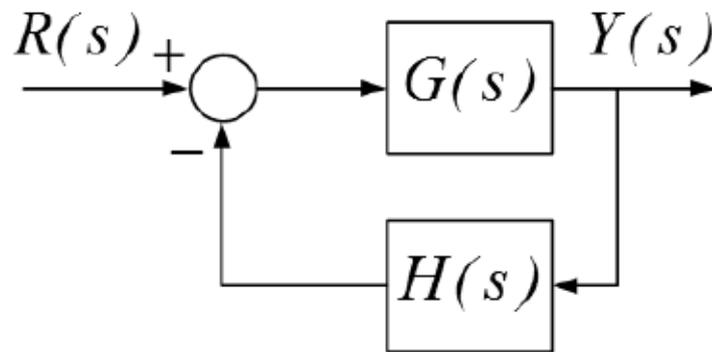
11

Princípio do argumento

- Se P representa o número de pólos e Z o número de zeros de uma função $G(s)$ envolvidos por um caminho fechado, percorrido a partir de **um ponto arbitrário s_0 , localizado sobre o caminho fechado do Plano s** , no sentido horário, então o número líquido de vezes que o caminho fechado mapeado no plano $G(s)$ envolverá a origem do plano $G(s)$ será $N = Z - P$

12

- Sistemas de controle de malha fechada.



Malha aberta: $G(s)H(s)$

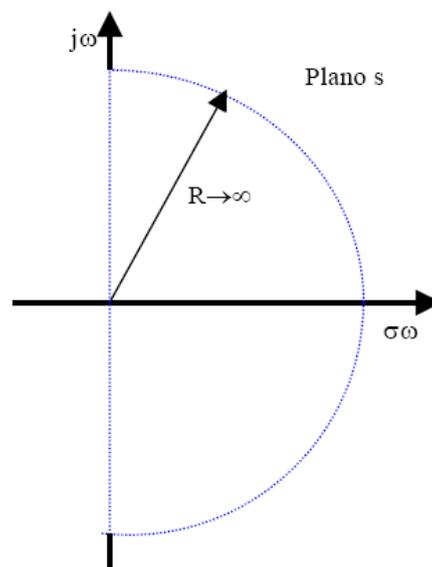
Malha fechada: $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$

Equação característica: $Q(s) = 1 + G(s)H(s)$

A estabilidade do sistema de controle dependerá da **localização das raízes da equação característica no Plano s** , ou seja da localização dos pólos de malha fechada.

15

O critério de estabilidade originalmente proposto por Nyquist utiliza o princípio do argumento considerando como caminho fechado a ser percorrido, conforme a Figura ao lado, todo o semiplano direito do Plano s .



16

Plano s \leftrightarrow Plano $1+G(s)H(s)$.

O princípio do argumento pode ser empregado para determinar a diferença líquida entre o número de zeros e pólos de $1+G(s)H(s)$ localizados no semiplano direito do Plano s

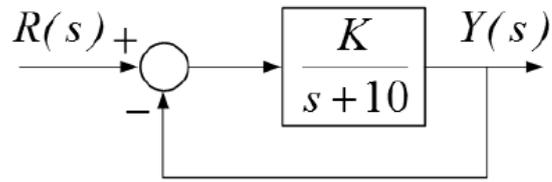
17

Plano $1+G(s)H(s)$ \leftrightarrow Plano $G(s)H(s)$

A origem $(0,0)$ do Plano $1+G(s)H(s)$ coincide com o ponto -1.0 no eixo real do Plano $G(s)H(s)$, podendo-se realizar a análise de estabilidade empregando o princípio do argumento, avaliando-se o número líquido e o sentido dos envoltimentos do ponto $-1.0+j0.0$ no plano $G(s)H(s)$.

18

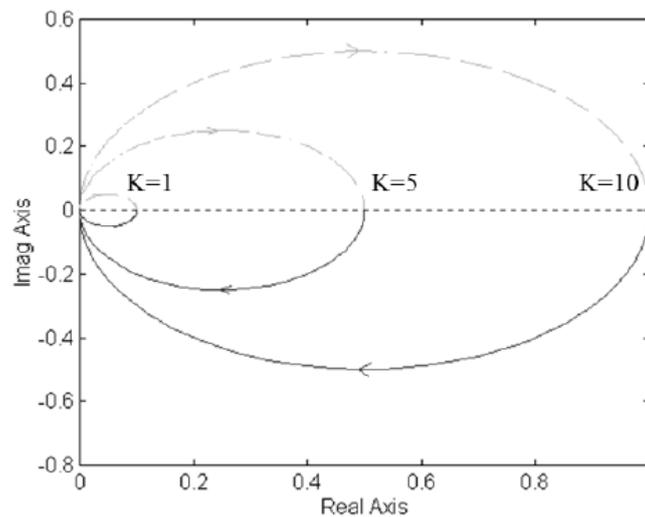
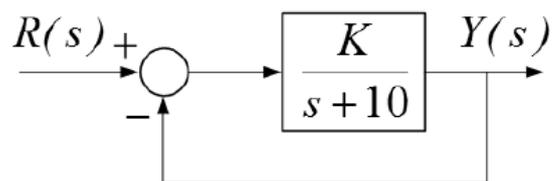
Cr terio de Estabilidade de Nyquist



$$T(s) = \frac{K}{s+10+K} \Rightarrow \text{logo para } K > 0 \text{ o sistema   est vel}$$

19

Cr terio de Estabilidade de Nyquist



20

- ❖ Independente do valor de $K > 0$ não há nenhum envolvimento do ponto $-1.0 + j0.0$ do plano $G(s)H(s)$, resultado em $N = 0$.
- ❖ Uma vez que não existem pólos de $G(s)H(s)$ localizados no semiplano direito do Plano s , implica em $P = 0$.

$$Z = N + P = 0$$

Neste caso não existem zeros da função $1 + G(s)H(s)$, que coincidem com os pólos de malha fechada localizados no semiplano direito do Plano s e o sistema permanecerá estável para qualquer $K > 0$.

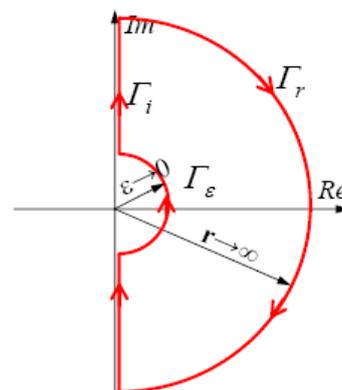
- Se o sistema é estável em malha aberta, para que a malha fechada seja internamente estável é necessário e suficiente que não haja cancelamentos instáveis e que o diagrama de Nyquist da função de transferência em malha aberta ($G_0(s)K(s)$) não contorne o ponto $(-1,0)$.
- Se o sistema é instável em malha aberta, com P pólos no semi-plano complexo direito aberto (não incluindo o eixo imaginário) então, para que o sistema em malha fechada seja internamente estável é necessário e suficiente que não existam cancelamentos instáveis e que o diagrama de Nyquist de $G_0(s)K(s)$ contorne P vezes em sentido anti-horário o ponto $(-1,0)$.
- Se o diagrama de Nyquist de $G_0(s)K(s)$ passa pelo ponto $(-1,0)$, existe uma frequência $\omega_0 \in R$ tal que $F(j\omega_0) = -1$, ou seja, o sistema em malha fechada apresenta pólos exatamente sobre o eixo imaginário. Esta situação é conhecida como condição de estabilidade crítica.

Contorno de Nyquist Modificado

Como aplicar o critério de Nyquist quando existem pólos da função de transferência em malha aberta sobre o eixo imaginário ($j\omega$), por exemplo, sobre a origem?

Nestes casos não se pode utilizar o contorno de Nyquist dado que não se pode calcular a mudança de fase ao passar o ponto $s=0$. Pode no entanto utilizar-se o contorno de Nyquist modificado que para um pólo na origem se apresenta na figura. O contorno de Nyquist modificado é composto por três curvas: Γ_r , Γ_i e Γ_ϵ .

À medida que $\epsilon \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, a região circunscrita pelo contorno de Nyquist coincide com o Semi-plano Complexo Direito Aberto a exceção de uma área infinitesimal.



Contorno de Nyquist Modificado

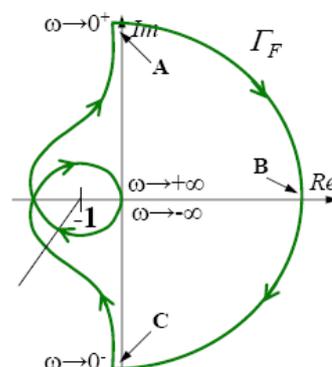
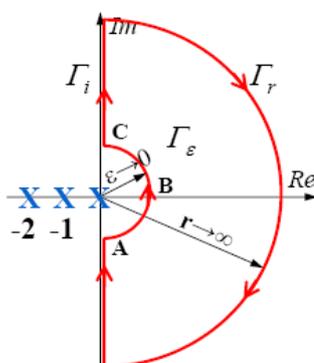
Teorema 1. [Critério de Nyquist, Modificado].

Seja $G_0(s)K(s)$ uma função de transferência em malha aberta com P pólos no semi-plano complexo direito aberto SPDA (não inclui o eixo imaginário), então o sistema em malha fechada tem Z pólos no SPDA se e só se o diagrama de Nyquist de $G_0(s)K(s)$ der $N=Z-P$ voltas em sentido horário em torno do ponto $(-1,0)$ quando s percorre o contorno de Nyquist modificado.

25

Contorno de Nyquist Modificado

Exemplo: Diagrama de Nyquist para $k > 0$ $G_0(s)K(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$



$$N=2, P=0 \Rightarrow Z=N+P=2$$

Para valores do ganho k suficientemente altos o sistema é instável em malha fechada.

26

Estabilidade Relativa, Margens de Estabilidade

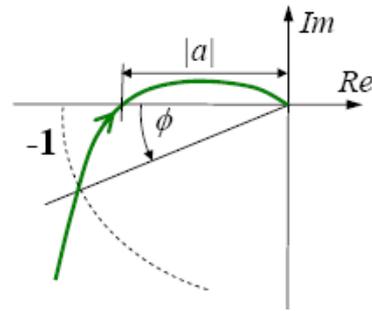
27

Estabilidade Relativa, Margens de Estabilidade

- No projeto de sistemas de controle em malha fechada é muitas vezes necessário analisar mais profundamente a questão da estabilidade. Em particular, é normalmente desejável obter **medidas de quão longe da instabilidade está o sistema nominal em malha fechada**, ou seja é necessário **quantificar a estabilidade relativa** do sistema **em malha fechada**.
- Esta quantificação pode obter-se definindo medidas da distância da resposta em frequência do sistema nominal ao ponto de estabilidade crítica $(-1,0)$.
- Obs: Essas medidas servem para quantificar a tolerância na aquisição de componentes, colocar limites no desgaste admissível de peças, etc. Assumem um sistema nominal estável e quantificam algumas distâncias à estabilidade crítica.

28

- **Margens de Ganho** : Quantificam o ganho adicional que se deve colocar na malha de retroação de forma a levar o sistema à condição de estabilidade crítica.
- **Margem de Ganho Positiva (MG+)**:
Ganho em dB que se deve somar para levar o sistema à condição de estabilidade crítica.
- **Margem de Ganho Negativa (MG-)**:
Ganho em dB que se deve subtrair para levar o sistema à condição de estabilidade crítica.
- **Margem de Fase (MF)**: Quantifica o atraso de fase puro que se deveria somar ao sistema para o conduzir à condição de estabilidade crítica.

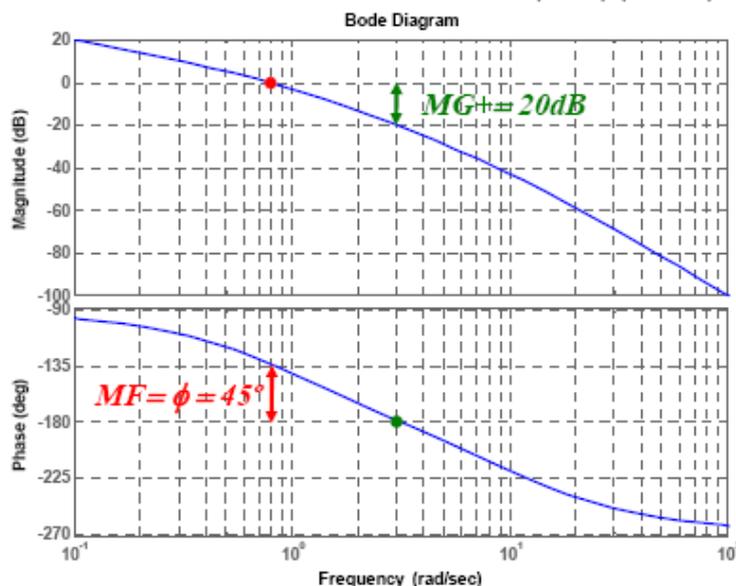


$$MG+ \triangleq 20 \log_{10} \left(\frac{1}{|a|} \right)$$

$$MF \triangleq \phi$$

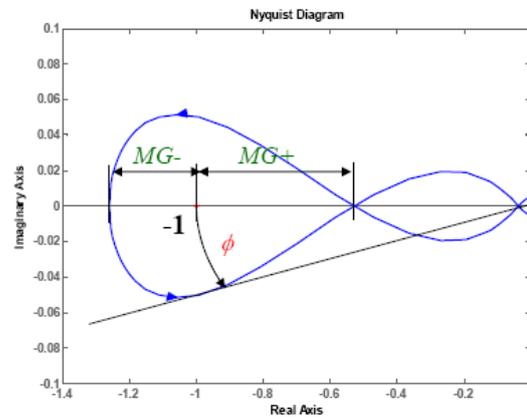
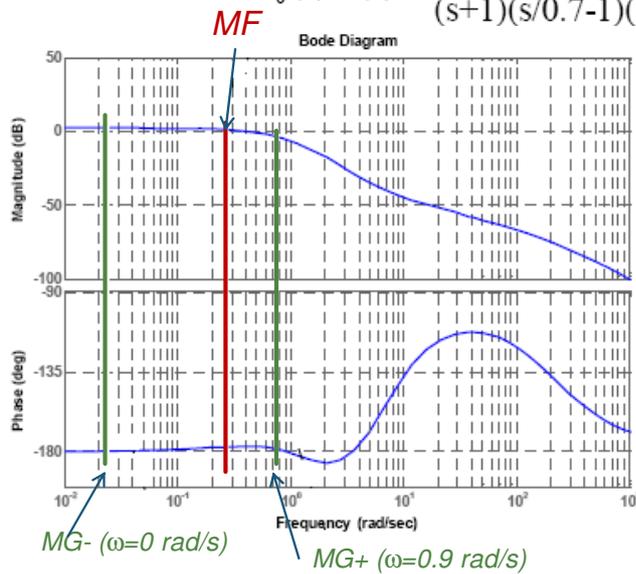
- As margens de estabilidade podem-se marcar e quantificar com recurso aos diagramas de bode. Assim considere o ganho de malha nominal $G_0(s)K(s)$:

$$G_0(s)K(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$$



- Análise de estabilidade do ganho de malha nominal $G_0(s)K(s)$:

$$G_0(s)K(s) = \frac{0.035(s^2 + 10s + 36)}{(s+1)(s/0.7-1)(s/2+1)(s/200+1)}$$



Sistema estável em malha fechada, $N=Z-P$, com $N=1$, $P=-1 \Rightarrow Z=0$

$MG^- = -2.0 \text{ dB}$, $MG^+ = 5.5 \text{ dB}$, $MF = \phi = 2.88^\circ$