Gabarito Lista 2

1ª Questão

Supondo que a massa específica do fluido de processo é constante

Supondo que a 1ª válvula nos permite controlar F_1:

b) Variáveis de entrada ou perturbação: F_1 e F_4

Variáveis de saída ou controladas (manipuladas): F_2 e F_3

- Balanço de massa para o 1º reservatório: Dinâmico

$$\rho . F_1(t) - \rho F_2(t) = \frac{d m_1(t)}{dt}$$

com $m_1 = \rho . A_1 . h_1(t)$; logo:

$$\rho . F_1(t) - \rho F_2(t) = \frac{\rho . A_1 . d h_1(t)}{dt} \quad (1)$$

1 equação, 2 variáveis $[F_2(t) ; h_1(t)]$

- Sabemos que a vazão de um fluxo de efluente a partir de um tanque é proporcional à raiz cúbica da altura do líquido:

$$F_2(t) = C_1 . \sqrt[3]{h_1(t)} \quad (2)$$

2 equações, 2 variáveis $[F_2(t) ; h_1(t)]$

- Balanço de massa para o segundo reservatório: Dinâmico

$$\rho F_2(t) + \rho F_4(t) - \rho F_3(t) = \frac{d\, m_2}{dt}$$

com $m_2 = \rho . A_2 . h_2(t)$, logo:

$$\rho F_2(t) + \rho F_4(t) - \rho F_3(t) = \frac{\rho . A_2 . d h_2(t)}{dt} \quad (3)$$

3 equações, 4 variáveis $[F_2(t), h_1(t), F_3(t), h_2(t)]$

- Novamente, utilizando a informação que o fluxo do efluente é proporcional à raiz cúbica da altura do líquido;

$$F_3(t) = C_2 . \sqrt[3]{h_2(t)} \quad (4)$$

4 equações, 4 variáveis $[F_2(t), h_1(t), F_3(t), h_2(t)]$

- Linearizando as equações não-lineares (2) e (4)

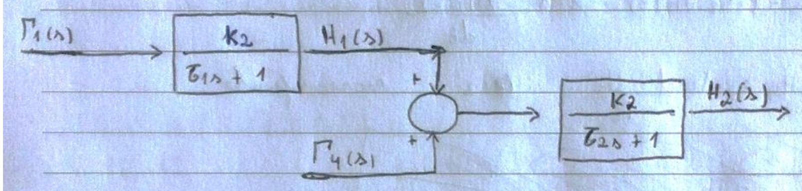
$$F_2(t) \approx \bar{F}_2 + e_1 . [h_1(t) - \bar{h}_1] \quad (5)$$

Logo, procede-se a linearizar as eqs. e introduzem-se os variáveis desvios (subtração das eqs dinâmica e de equilíbrio) e logo aplica-se Laplace, e finalmente reordenando, tem-se:

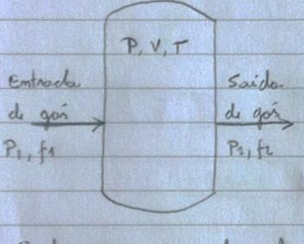
$$H_2(s) = \frac{K_2/\cancel{K_1}}{\tau_2 s + 1} \cdot \frac{\cancel{K_1}}{\tau_1 s + 1}\,\Gamma_1(s) + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}\,\Gamma_4(s)$$

$$\boxed{H_2(s) = \frac{K_2}{(\tau_2 s + 1)\cdot(\tau_1 s + 1)}\,\Gamma_1(s) + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}\,\Gamma_4(s)} \quad (16)$$

Fazendo o diagrama de blocos da equação (16)



Questão 2 - Como a professora pediu apenas o balanço de massa e não comentou nada à respeito da termodinâmica nem à respeito da cinética do processo, podemos supor que o processo ocorre todo de forma isotérmica (não existe ΔT, logo torna o balanço de energia irrelevante) e supomos também que não ocorre reação química (logo, podemos presumir conservação de massa e também conservação de quantidade de matéria, leia-se "número de mols").



Sendo que, considerando que o processo ocorre em condições de gás ideal:

$pV = nRT \Rightarrow p(t)V = n(t).RT$

$$\frac{n(t)}{V} = \frac{p(t)}{R.T}$$

Como as pressões P_1 e P_2 estão determinadas e não variam com o tempo, logo: $\frac{n}{V} = \frac{p}{RT}$

Balanço Material p/ o Processo:

$$C_1 . f_1(t) - C_2 . f_2(t) = \frac{dn(t)}{dt}$$

$$\frac{n_1}{V} f_1(t) - \frac{n_2}{V} . f_2(t) = \frac{dn(t)}{dt} \Rightarrow \text{Lembrete!}$$

Logo, trabalharemos em termos de concentrações molares.

$$C1 . f_1(t) - C2 . f_2(t) = \frac{dn(t)}{dt}$$

1 equação, 2 variáveis
$[f_2(t) ; n(t)]$

* $f_1(t)$ não é uma variável a ser considerada, já que nós decidimos como ela irá variar, não o processo.

- Equação que descreve como varia a $f_2(t)$ em relação ao reservatório:

$f_2 = \alpha . \sqrt{\Delta P} \Rightarrow$ Equação não linear

2 equações, 2 variáveis

$$\underbrace{\frac{V}{p_2 \cdot c_1}}_{\tau_1 \text{ (unidade de tempo)}} \cdot \frac{dP(t)}{dt} + P(t) = \underbrace{\frac{p_1}{p_2 \cdot c_1}}_{K_1} \cdot F_1(t)$$

$$\tau_1 \cdot \frac{dP(t)}{dt} + P(t) = K_1 \cdot F_1(t)$$ => Aplicando a transformada de Laplace, temos

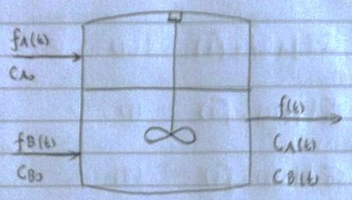
$$\tau_1 s \cdot P(s) + P(s) = K_1 \cdot F_1(s)$$

$$P(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} F_1(s)$$ => função de transf. de 1ª ordem.

– Diagrama de blocos:

$$F_1(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K_1}{\tau_1 s + 1}} \xrightarrow{P(s)}$$

Questão 3.



Como são 3 componentes, A, B e Produto, teremos 3 balanços independentes.

- Balanço material dinâmico para o componente A:

(1) $f_A(t) \cdot C_{A0} - V \cdot K \cdot C_A(t) \cdot C_B(t) - f(t) \cdot C_A(t) = V \cdot \dfrac{dC_A(t)}{dt}$ 1 eq; 3 variáveis $[C_A(t), C_B(t), f(t)]$

- Balanço material dinâmico para o componente B:

(2) $f_B(t) \cdot C_{B0} - V \cdot K \cdot C_A(t) \cdot C_B(t) - f(t) \cdot C_B(t) = V \cdot \dfrac{dC_B(t)}{dt}$ 2 eq, 3 variáveis $[C_A(t), C_B(t), f(t)]$

- Balanço Material total:

$$\rho f_A(t) + \rho \cdot f_B(t) - \rho f(t) = \frac{d\rho V}{dt} = 0$$

$$f(t) = f_A(t) + f_B(t) \qquad (3)$$

3 eq, 3 variáveis $[C_A(t), C_B(t), f(t)]$

Substituindo (3) em (1) e (2)

$$f_A(t) \cdot C_{A0} - V \cdot K \cdot C_A(t) C_B(t) - f_A(t) \cdot C_A(t) - f_B(t) \cdot C_A(t) = V \cdot \frac{dC_A(t)}{dt} \qquad (4)$$

$$f_B(t) \cdot C_{B0} - V \cdot K \cdot C_A(t) C_B(t) - f_A(t) \cdot C_B(t) - f_B(t) \cdot C_B(t) = V \cdot \frac{dC_B(t)}{dt} \qquad (5)$$

- Linearizando termos não lineares:

$$VK C_A(t) C_B(t) \approx V \cdot K \cdot \bar{C}_A \bar{C}_B + V \cdot K \cdot \bar{C}_A (C_B(t) - \bar{C}_B) + VK\bar{C}_B (C_A(t) - \bar{C}_A) \qquad (6)$$

- Linearizando termos não lineares:

$$f_A(t)\, c_A(t) \approx \bar{f_A}\bar{c_A} + \bar{f_A}\,(c_A(t) - \bar{c_A}) + \bar{c_A}\,(f_A(t) - \bar{f_A}) \qquad (7)$$

$$f_B(t) \cdot c_A(t) \approx \bar{f_B}\bar{c_A} + \bar{f_B}\,(c_A(t) - \bar{c_A}) + \bar{c_A}\,(f_B(t) - \bar{f_B}) \qquad (8)$$

$$f_A(t) \cdot c_B(t) \approx \bar{f_A}\bar{c_B} + \bar{f_A}\,(c_B(t) - \bar{c_B}) + \bar{c_B}\,(f_A(t) - \bar{f_A}) \qquad (9)$$

$$f_B(t)\, c_B(t) \approx \bar{f_B}\bar{c_B} + \bar{f_B}\,(c_B(t) - \bar{c_B}) + \bar{c_B}\,(f_B(t) - \bar{f_B}) \qquad (10)$$

- Balanço material em estado estacionário para o componente A:

$$\bar{f_A}\, c_{A0} - V.K.\bar{c_A}\bar{c_B} - \bar{f_B}.\bar{c_A} - \bar{f_A}.\bar{c_A} = V.\frac{d\bar{c_A}}{dt} = 0 \qquad (11)$$

Substituindo (6), (7) e (8) em (4), subtraindo (11) e definindo as variáveis de desvio:

$$\tau_1 . \frac{d\,c_A(t)}{dt} + c_A(t) = K_1 . F_A(t) - K_2 . C_B(t) - K_3 . F_B(t)$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \quad c_A(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1}\left[K_1 F_A(s) - K_2 C_B(s) - K_3 F_B(s) \right] \qquad (12)$$

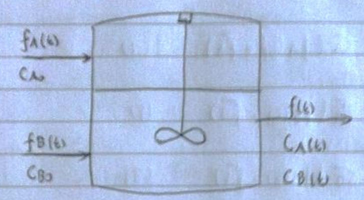
Onde $\tau_1 = \dfrac{V}{\bar{f_A} + \bar{f_B} + VK\bar{c_B}}$ [min] ; $K_1 = \dfrac{\bar{c_{A0}} - \bar{c_A}}{\bar{f_A} + \bar{f_B} + VK\bar{c_B}}$ $\left[\dfrac{kmol/m^3}{m^3/min} \right]$

$K_2 = \dfrac{V.K.\bar{c_A}}{\bar{f_A} + \bar{f_B} + VK\bar{c_B}}$; $K_3 = \dfrac{\bar{c_A}}{\bar{f_A} + \bar{f_B} + VK\bar{c_B}}$ $\left[\dfrac{kmol/m^3}{m^3/min} \right]$

- Balanço material em estado estacionário para o componente B:

$$\bar{f_B} . c_{B0} - V.K.\bar{c_A}\bar{c_B} - \bar{f_B}\bar{c_B} - \bar{f_A}\bar{c_B} = V.\frac{d\bar{c_B}}{dt} = 0 \qquad (13)$$

Questão 3.



Como são 3 componentes, A, B e Produto, teremos 3 balanços independentes.

- Balanço material dinâmico para o componente A:

(1) $f_A(t) \cdot C_{A0} - V \cdot K \cdot C_A(t) \cdot C_B(t) - f(t) \cdot C_A(t) = V \cdot \dfrac{dC_A(t)}{dt}$ 1 eq; 3 variáveis $[C_A(t), C_B(t), f(t)]$

- Balanço material dinâmico para o componente B:

(2) $f_B(t) \cdot C_{B0} - V \cdot K \cdot C_A(t) \cdot C_B(t) - f(t) \cdot C_B(t) = V \cdot \dfrac{dC_B(t)}{dt}$ 2 eq; 3 variáveis $[C_A(t), C_B(t), f(t)]$

- Balanço material total:

$$\rho f_A(t) + \rho \cdot f_B(t) - \rho f(t) = \frac{d\rho V}{dt} = 0$$

$f(t) = f_A(t) + f_B(t)$ (3) 3 eq, 3 variáveis $[C_A(t), C_B(t), f(t)]$

Substituindo (3) em (1) e (2)

$$f_A(t) \cdot C_{A0} - V \cdot K \cdot C_A(t) C_B(t) - f_A(t) \cdot C_A(t) - f_B(t) \cdot C_A(t) = V \cdot \frac{dC_A(t)}{dt} \quad (4)$$

$$f_B(t) \cdot C_{B0} - V \cdot K \cdot C_A(t) C_B(t) - f_A(t) \cdot C_B(t) - f_B(t) \cdot C_B(t) = V \cdot \frac{dC_B(t)}{dt} \quad (5)$$

- Linearizando termos não lineares:

$$VK C_A(t) C_B(t) \cong V \cdot K \cdot \bar{C}_A \bar{C}_B + V \cdot K \cdot \bar{C}_A (C_B(t) - \bar{C}_B) + VK\bar{C}_B (C_A(t) - \bar{C}_A) \quad (6)$$

- Linearizando termos não lineares:

$$f_A(t)\, C_A(t) \approx \bar{f_A}\bar{C_A} + \bar{f_A}\,(C_A(t) - \bar{C_A}) + \bar{C_A}\,(f_A(t) - \bar{f_A}) \qquad (7)$$

$$f_B(t) \cdot C_A(t) \approx \bar{f_B}\bar{C_A} + \bar{f_B}\,(C_A(t) - \bar{C_A}) + \bar{C_A}\,(f_B(t) - \bar{f_B}) \qquad (8)$$

$$f_A(t) \cdot C_B(t) \approx \bar{f_A}\bar{C_B} + \bar{f_A}\,(C_B(t) - \bar{C_B}) + \bar{C_B}\,(f_A(t) - \bar{f_A}) \qquad (9)$$

$$f_B(t)\, C_B(t) \approx \bar{f_B}\bar{C_B} + \bar{f_B}\,(C_B(t) - \bar{C_B}) + \bar{C_B}\,(f_B(t) - \bar{f_B}) \qquad (10)$$

- Balanço Material em estado estacionário para o componente A:

$$\bar{f_A}\, C_{A0} - V.K.\bar{C_A}\bar{C_B} - \bar{f_B}.\bar{C_A} - \bar{f_A}.\bar{C_A} = V.\frac{d\bar{C_A}}{dt} = 0 \qquad (11)$$

Substituindo (6), (7) e (8) em (4), e subtraindo (11) e definindo as variáveis de desvio:

$$\tau_1 . \frac{d\, C_A(t)}{dt} + C_A(t) = K_1 . F_A(t) - K_2 . C_B(t) - K_3 . F_B(t)$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \qquad C_A(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1}\left[K_1 F_A(s) - K_2 C_B(s) - K_3 F_B(s) \right] \qquad (12)$$

Onde $\tau_1 = \dfrac{V}{\bar{f_A} + \bar{f_B} + VK\bar{C_B}}$ [min] ; $K_1 = \dfrac{\bar{C_{A0}} - \bar{C_A}}{\bar{f_A} + \bar{f_B} + VK\bar{C_B}}$ $\left[\dfrac{kmol/m^3}{m^3/min}\right]$

$K_2 = \dfrac{V.K.\bar{C_A}}{\bar{f_A} + \bar{f_B} + VK\bar{C_B}}$; $K_3 = \dfrac{\bar{C_A}}{\bar{f_A} + \bar{f_B} + VK\bar{C_B}}$ $\left[\dfrac{kmol/m^3}{m^3/min}\right]$

- Balanço material em estado estacionário para o componente B:

$$\bar{f_B} . C_{B0} - V.K.\bar{C_A}\bar{C_B} - \bar{f_B}\bar{C_B} - \bar{f_A}\bar{C_B} = V.\frac{d\bar{C_B}}{dt} = 0 \qquad (13)$$

- Substituindo (14) em (12), temos:

$$C_A(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1}\left[K_1 F_A(s) - K_3 F_B - \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}\left(K_4 F_B(s) - K_5 C_A(s) - K_6 F_A(s)\right)\right]$$

$$C_A(s) = \left[\frac{K_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{K_2 K_6}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}\right] F_A(s) - \left[\frac{K_3}{\tau_1 s+1} + \frac{K_2 K_4}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}\right] F_B(s)$$

$$+ \frac{K_2 K_5}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \cdot C_A(s)$$. Então:

$$\left[\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1) - K_2 K_5}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}\right] C_A(s) = \left[\frac{K_1(\tau_2 s+1) + K_2 K_6}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}\right] F_A(s) - \left[\frac{K_3(\tau_2 s+1) + K_2 K_4}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}\right] F_B(s)$$

$$\boxed{\frac{C_A(s)}{F_A(s)} = \left[\frac{K_1(\tau_2 s+1) + K_2 K_6}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1) - K_2 K_5}\right]} \qquad \boxed{\frac{C_A(s)}{F_B(s)} = \frac{-\left[K_3(\tau_2 s+1) + K_2 K_4\right]}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1) - K_2 K_5}}$$

- Para calcular o ganho no estado estacionário, basta fazer $s=0$;

$$\frac{\Delta C_A}{\Delta F_A} = \frac{K_1 + K_2 K_6}{1 - K_2 K_5} \qquad \frac{\Delta C_A}{\Delta F_B} = \frac{-\left[K_3 + K_2 K_4\right]}{1 - K_2 K_5}$$

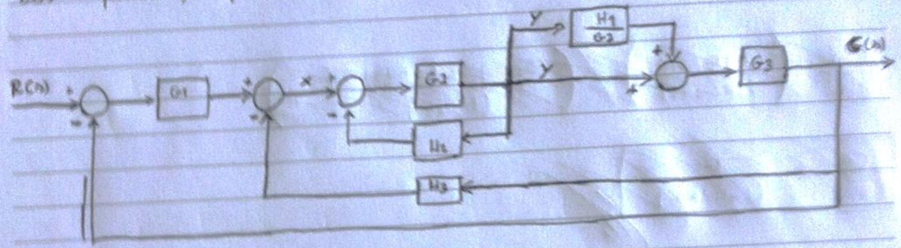
Podemos notar que a vazão de B implica em um ganho negativo para C_A quando $K_2 K_5 < 1$ e K_3, K_2 e K_4 são positivos.

Para extrair as raízes, basta pegar o denominador da função de transferência e igualar a zero.

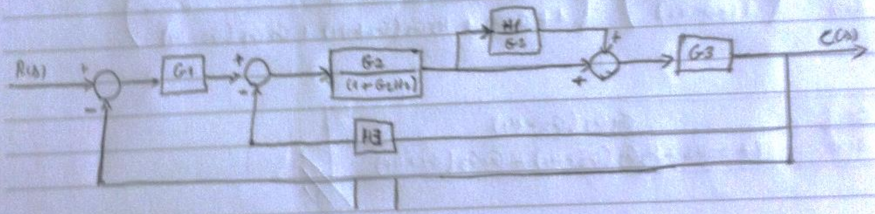
$$(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1) - K_2 K_5 = 0 \Rightarrow \tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2) s + (1 - K_2 K_5) = 0$$

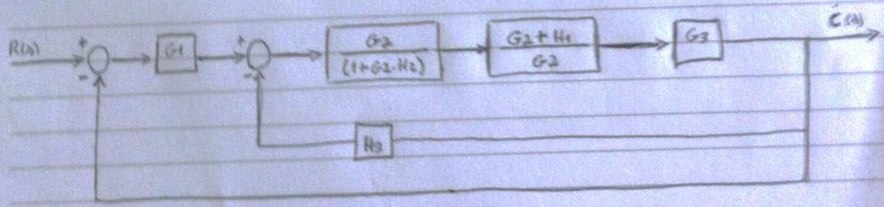
Assim, podemos estudar a estabilidade do sistema.

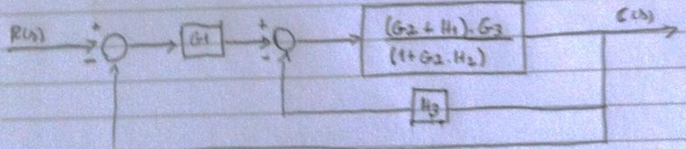
Questão 4 - O ideal, é ir simplificando a malha de controle aos poucos, por partes.



$$Y = G_2\,[X - H_2 . Y] \Rightarrow Y = G_2 . X - G_2 . H_2 . Y \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{G_2}{(1+G_2H_2)}$$







$$C(s) = \left[\frac{(G_2+H_1).G_3}{(1+G_2.H_2)}\right] . \left(G_1 . R(s) - H_3 . C(s) - G_1 . C(s)\right)$$

$$C(s) + C(s).H_3\left[\frac{(G_2+H_1).G_3}{(1+G_2H_2)}\right] + C(s).G_1\left[\frac{(G_2+H_1).G_3}{(1+G_2H_2)}\right] = \left[\frac{(G_2+H_1).G_1G_3}{(1+G_2H_2)}\right] . R(s)$$

Atlas Copco

$$C(s) \cdot \left[1 + H_3 \left(\frac{(G_2 + H_1) \cdot G_3}{(1 + G_2 H_2)} \right) + G_1 \left(\frac{(G_2 + H_1) \cdot G_3}{(1 + G_2 H_2)} \right) \right] = \left(\frac{(G_2 + H_1) G_1 G_3}{(1 + G_2 H_2)} \right) \cdot R(s)$$

$$\cancel{\frac{C(s)}{R(s)} = \left(\frac{(G_2 + H_1) \cdot G_1 G_3}{(1 + G_2 H_2)} \right) / \left(\frac{(G_2 + H_1) \cdot G_3 \cdot (1 + H_3 + G_1)}{(1 + G_2 H_2)} \right)}$$

$$\boxed{\cancel{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1}{(1 + H_3 + G_1)}}}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \left(\frac{(G_2 + H_1) \cdot G_1 G_3}{(1 + \cancel{G_2 H_2})} \right) \cdot \left(\frac{(1 + \cancel{G_2 H_2})}{1 + G_2 H_2 + H_3 G_3 (G_2 + H_1) + G_1 \cdot G_3 (G_2 + H_1)} \right)$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_3 (G_2 + H_1)}{1 + G_2 H_2 + H_3 G_3 (G_2 + H_1) + G_1 G_3 (G_2 + H_1)}}$$