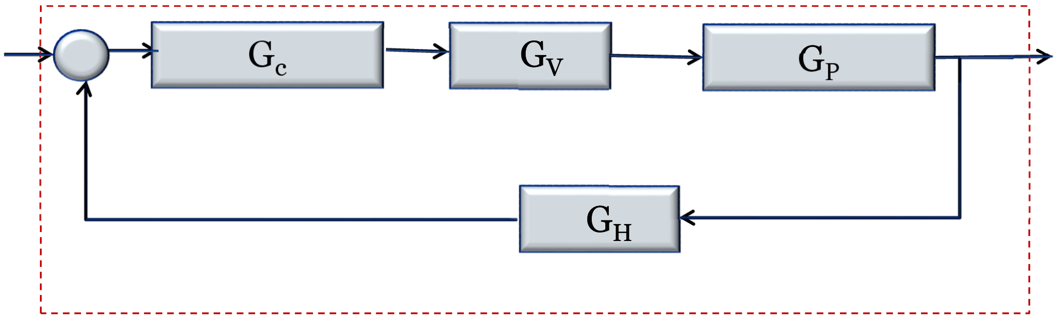
1

# Exemplos Modelos Dinâmicos

Profª Ninoska Bojorge

Departamento de Engenharia Química e de Petróleo – UFF

## Controle Feedback ... continuação



## Forma Geral de uma Função de Transferência

Exemplo

$$G(s) = \frac{K_p \prod_{n=0}^{m} (\tau_L s + 1) e^{-\theta s}}{s^k \prod_{m=1}^{\infty} (\tau_p s + 1)}$$



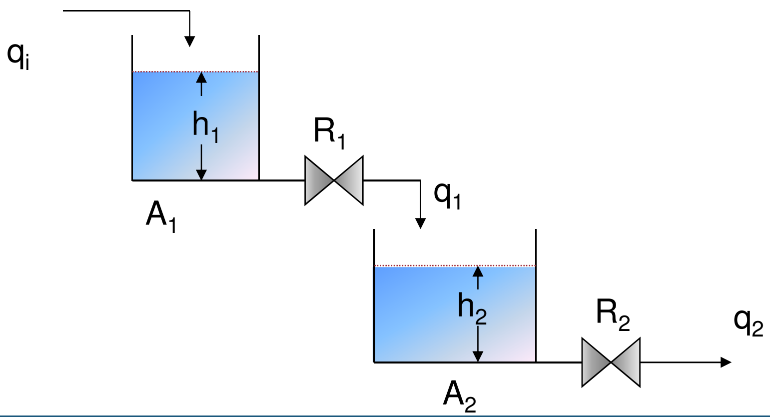
## Use a Expansão de Series Taylor para linearizar uma equação não linear

$$y(x) \approx y(x_0) + (x - x_0) \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=x_0} + \ldots$$

- Esta expressão fornece uma aproximação linear de y(x) em $x=x_0$ .
- Quanto mais próximo é x a $x_{0,}$ mais precisa será esta equação.
- Quanto mais não-linear seja a equação original, menos precisa será esta aproximação.

## Exemplo 1: Tanques em série

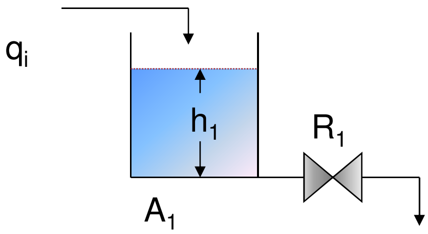
Considerem-se dois tanques de retenção de líquido que são colocados em série, de modo que a saída do primeiro tanque é uma entrada para o segundo tanque. Considere, se a taxa de saída do fluxo a partir de cada tanque está linearmente relacionada com a altura do líquido (Pressão de cabeça). Encontrar a função de transferência relativa as mudanças na taxa de fluxo do segundo tanque a partir de alterações na taxa de fluxo do primeiro tanque.






## Exemplo 1: Tanques em série … cont.

Tanque1:




$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_i - \frac{1}{R_1} h_1$$

$$q_1 = \frac{h_1}{R_1}$$

a fim de converter variáveis em forma variável desvio, as equações de estado estacionário para eqs 1 e 2 devem ser escrita como;

$$0 = q_{i,s} - \frac{1}{R_1} h_{1,s}$$

$$q_{1,s} = \frac{h_{1,s}}{R_1}$$

## Exemplo 1: Tanques em série … cont.

Tanque1:

Subtraindo equações em estado de equilíbrio da equações gerais, temos:

$$\left.\begin{aligned} A_1 \frac{dh_1}{dt} &= q_i - \frac{1}{R_1} h_1 \\ 0 &= \mathrm{q}_{i,s} - \frac{1}{R_1} h_{1,s} \end{aligned}\right\} \quad A_1 \frac{d\hat{h}}{dt} = \hat{q}_i - \frac{1}{R_1} \hat{h}_1$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{q}_1 &= \frac{h_1}{R_1} \\ q_{1,s} &= \frac{h_{1,s}}{R_1} \end{aligned}\right\} \quad \hat{q}_1 = \frac{\hat{h}_1}{R_1}$$

onde:

$$\hat{h}_1 = h_1 - h_{1,s}$$

$$\hat{q}_i = q_i - q_{i,s}$$

Subfixo s: estado de equilíbrio



## Exemplo 1: Tanques em série … cont.

Tomando T. Laplace na eq. 1 , temos;

$$A_1 \frac{dh'}{dt} = q_i' - \frac{1}{R_1} h_1'$$

$$A_1(sH_1'(s) - \underbrace{H_1'(0)}_{\to 0}) = Q_i'(s) - \frac{1}{R_1} H_1'(s)$$

$$A_1 s H_1'(s) + \frac{1}{R_1} H_1'(s) = Q_i'(s)$$

$$\frac{A_1 R_1 s H_1'(s) + H_1'(s)}{R_1} = Q_i'(s)$$

$$H_1'(s)\left[A_1 R_1 s + 1\right] = R_1 Q_i'(s)$$

## Exemplo 1: Tanques em série … cont.

$$H_1'(s)(\tau_1 s+1) = R_1 Q_i'(s)$$

Tomando T. Laplace na eq. 2 , temos;

$$Q_1'(s) = \frac{H_1'(s)}{R_1}, \quad eq2$$

essas duas funções de transferência dão informações sobre:

entrada: $Q_i$, de saída; H1

$$\frac{H_1'(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_1}{\tau_1 s+1} = \frac{K_1}{\tau_1 s+1}$$

e

entrada: H1, saída: Q1

$$\frac{Q_1'(s)}{H_1'(s)} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{K_1}$$

No entanto, a relação entre $Q_2$ e Qi são necessária...



## Exemplo 1: Tanques em série … cont.

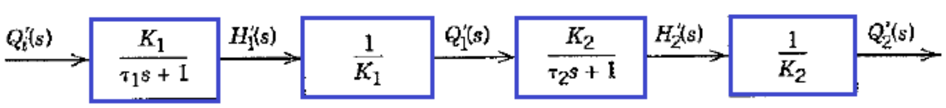
Para o tanque 2 é requerido :

$$\frac{H_2'(s)}{Q_1'(s)} = \frac{R_2}{A_2 R_2 s+1}$$

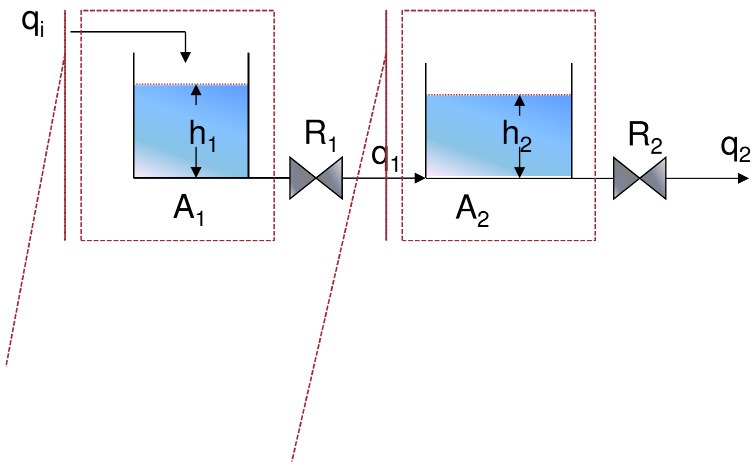
$$\frac{Q_2'(s)}{H_2'(s)} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{K_2}$$

$$\frac{Q_2'(s)}{Q_i'(s)} = \frac{Q_2'(s)}{H_2'(s)} \cdot \frac{H_2'(s)}{Q_1'(s)} \cdot \frac{Q_1'(s)}{H_1'(s)} \cdot \frac{H_1'(s)}{Q_i'(s)}$$

$$\frac{Q_2'(s)}{Q_i'(s)} = \frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$



## Exemplo 2: Sistemas interativos






## Exemplo 2: Sistemas interativos … cont.

Em st.st.

## Exemplo 2: Sistemas interativos … cont.

Assim, as EDOs:

$$q_i' - q_1' = A_1 \frac{dh_1'}{dt}$$

$$q_1' - q_2' = A_2 \frac{dh_2'}{dt}$$

$$q_1' = \frac{1}{R_1}(h_1' - h_2')$$

$$q_2' = \frac{h_2'}{R_2}$$



## Exemplo 2: Sistemas interativos … cont.

Tomando Transformada de Laplace;

$$Q_i'(s) - Q_1'(s) = A_1(sH_1'(s) - \underbrace{H_1'(0)}_{\to 0})$$

$$Q_1'(s) - Q_2'(s) = A_2(sH_2'(s) - \underbrace{H_2'(0)}_{\to 0})$$

$$Q_1'(s) = \frac{1}{R_1}(H_1'(s) - H_2'(s))$$

$$Q_2'(s) = \frac{H_2'(s)}{R_2}$$

## Exemplo 2: Sistemas interativos … cont.

reordenando;

$$\frac{Q_1'(s)}{Q_i'(s)}\cdot\frac{H_2'(s)}{Q_1'(s)}$$

$$Q_i'(s)-Q_1'(s)=A_1 s(R_1 Q_1'(s)+H_2'(s))$$

$$Q_i'(s)-Q_1'(s)=A_1 s R_1 H_2'(s) Q_1'(s)+A_1 s H_2'(s)$$

$$Q_1'(s)=A_2 s H_2'(s)+\frac{H_2'(s)}{R_2}$$



## Exemplo 2: Sistemas interativos … cont.

$$Q_i'(s)=A_1 R_1 s\left[\frac{H_2'(s)}{R_2}+A_2 s H_2'(s)\right]+A_1 s H_2'(s)+\left[\frac{H_2'(s)}{R_2}+A_2 s H_2'(s)\right]$$

$$Q_i'(s)=A_1 R_1 s\frac{H_2'(s)}{R_2}+A_1 R_1 s A_2 s H_2'(s)+A_1 s H_2'(s)+\frac{H_2'(s)}{R_2}+A_2 s H_2'(s)$$

$$Q_i'(s)=H_2'(s)\left[\frac{A_1 R_1 s+A_1 R_1 s A_2 R_2 s+A_1 R_2 s+1+A_2 R_2 s}{R_2}\right]$$

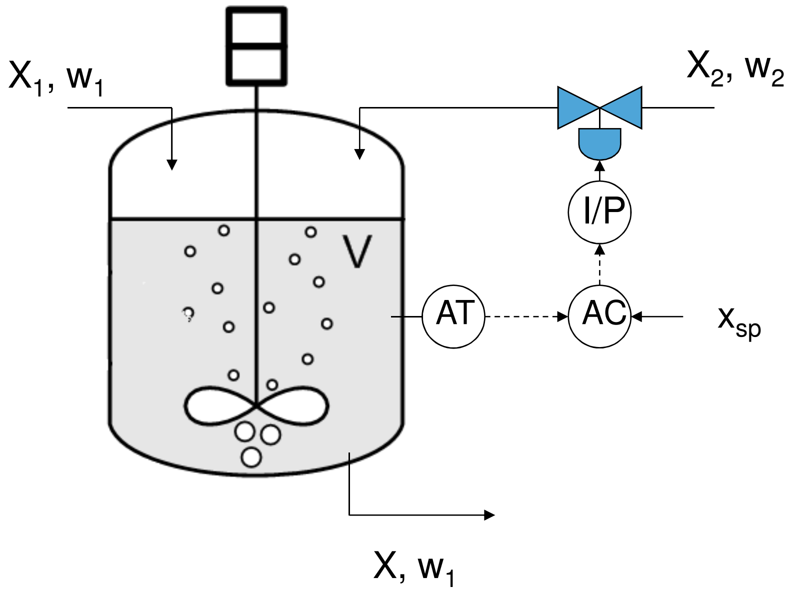
$$\frac{H_2'(s)}{Q_i'(s)}=\frac{R_2}{1+\tau_1 s+\tau_1\tau_2 s^2+A_1 R_2 s+\tau_2 s}$$

$$\frac{Q_2'(s)}{Q_i'(s)}=\frac{1}{1+\tau_1 s+\tau_1\tau_2 s^2+A_1 R_2 s+\tau_2 s}$$

Represente em diagrama de bloco!

# Exemplo 3: Tanque de mistura

- Considere o processo de mistura num  tanque agitado:






# Exemplo 3: Tanque de mistura

- Objetivo de controle: regular a composição x no tanque, ajustando $w_2$.
- Variável perturbação: composição na entrada, $x_1$
- Suposições:
  - $w_1$ é constante,
  - Inicialmente o sistema está no estado estacionário,
  - Ambas as composições de alimentação e de saída são diluídas,
  - Vazão de alimentação é constante
  - Na corrente 2 é um material puro

## Exemplo 3: Modelo do Processo

Balanço de massa

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho}(w_1 + w_2 - w)$$

Balanço por componente

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w_1}{V\rho}(x_1 - x) + \frac{w_2}{V\rho}(x_2 - x)$$

$$V\rho\frac{dx}{dt} = w_1 x_1 - w_1 x + w_2 x_2 - w_2 x$$

$$V\rho\frac{dx}{dt} = wx_1 - wx + w_2$$



## Exemplo 3: Modelo do Processo

No estado de equilíbrio:

$$0 = \overline{w}\overline{x}_1 - \overline{w}\overline{x} + \overline{w}_2$$

Em termo de variável desvio:

$$V\rho\frac{dx'}{dt} = \overline{w}x_1' - \overline{w}x' + w_2'$$

Logo:

$$\frac{V\rho}{\overline{w}}\frac{dx'}{dt} = x_1' - x' + \frac{1}{\overline{w}}w_2'$$

$$\tau\frac{dx'}{dt} = x_1' - x' + Kw_2'$$

## Exemplo 3: Modelo do Processo

Aplicando transformada de Laplace

$$\tau(sX'(s) - \underbrace{X'(0)}_{=0}) = X_1'(s) - X'(s) + KW_2'(s)$$

$$X'(s)(\tau s + 1) = X_1'(s) + KW_2'(s)$$

$$\frac{X'(s)}{X_1'(s)} = G_1(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$\frac{X'(s)}{W_2'(s)} = G_2(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$



## Exemplo 3: Modelo do Processo

Representação em Diagrama de Bloco