Departamento de Engenharia Química e de Petróleo – UFF

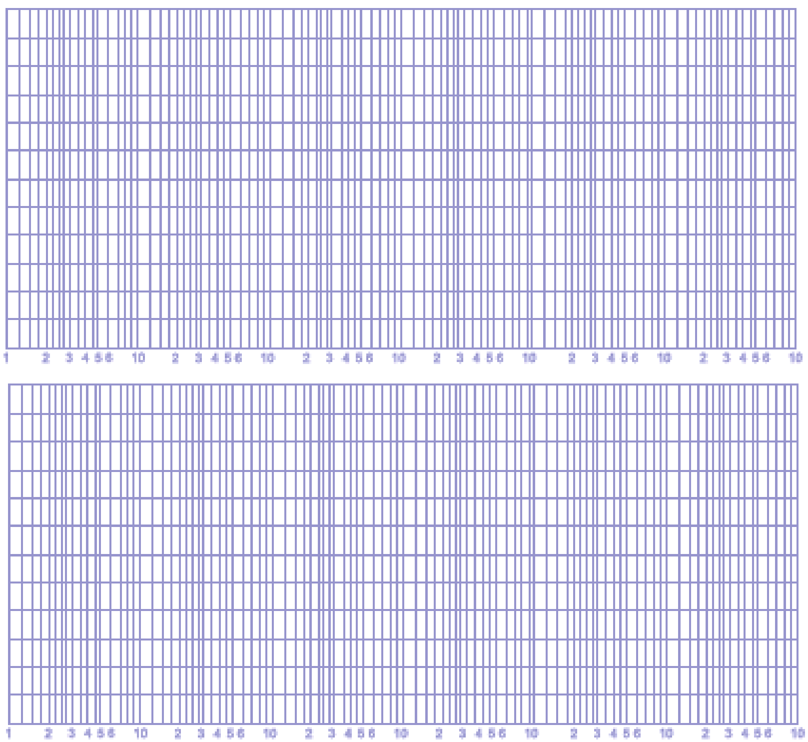
Disciplina: TEQ102- CONTROLE DE PROCESSOS

Diagrama de Bode: Traçado por assíntotas

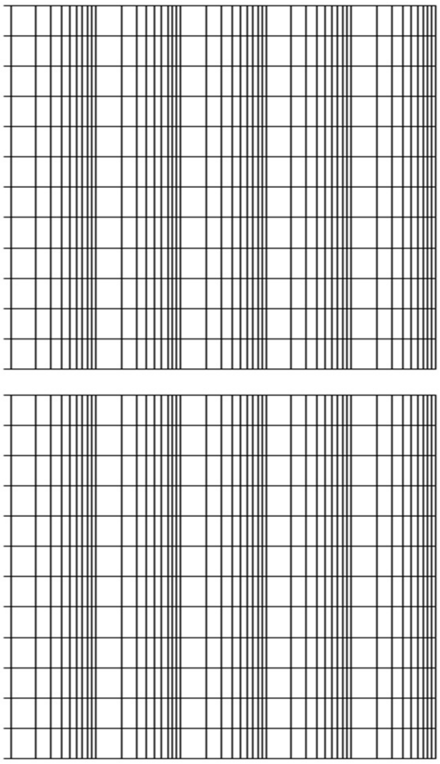
custo

Profª Ninoska Bojorge

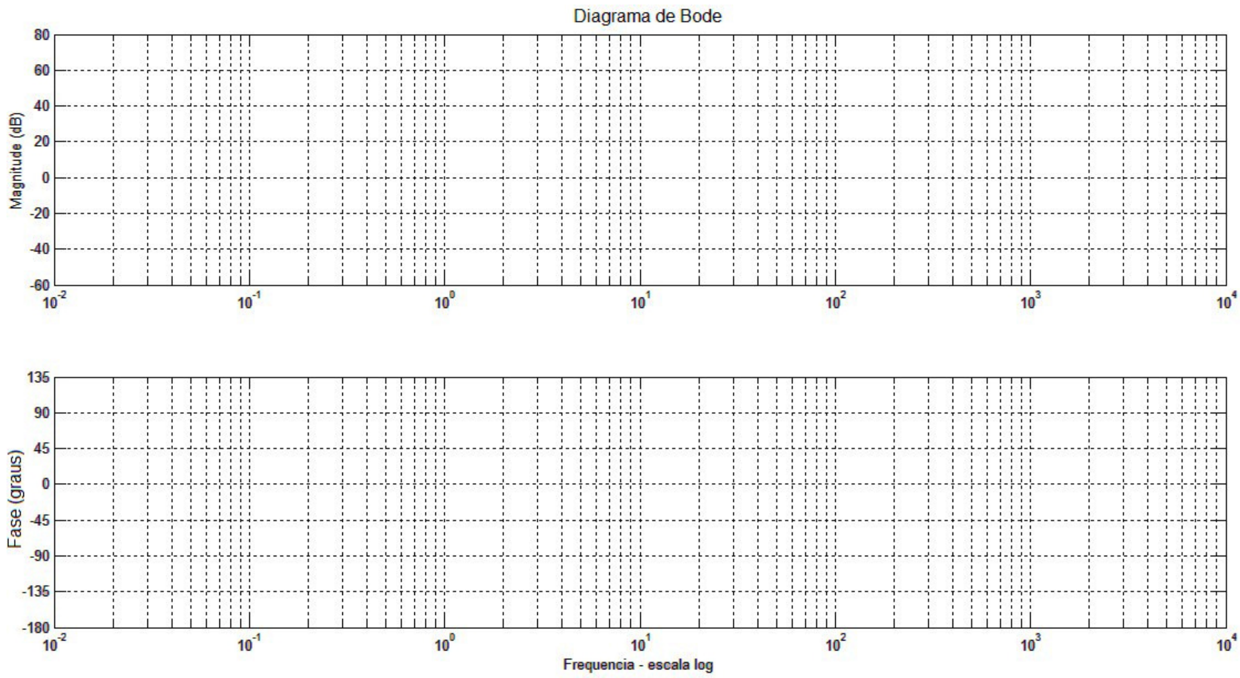
Papel Bode 1

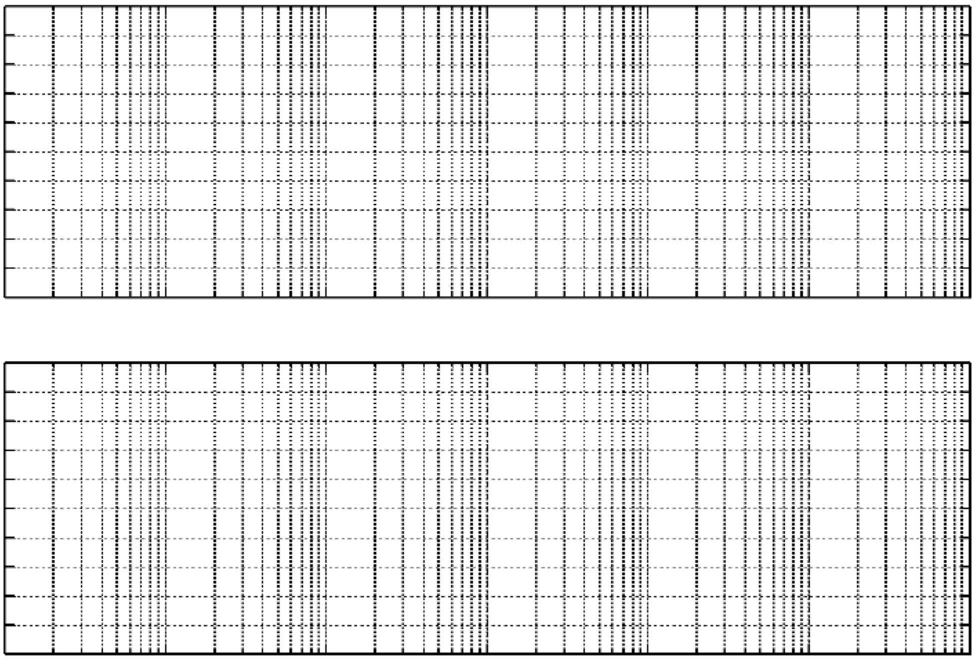


Papel Bode 2



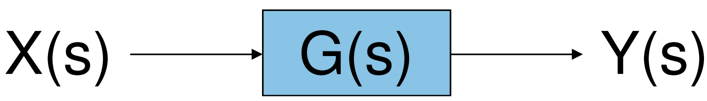
Papel Bode 3





Resposta de Frequência

Lembrando!!



Se $x(t) = A\text{sen}\ \omega t$ então $y(t) = A\ \text{sen}\ (\omega\, t + \varphi)$

A função de transferência senoidal $G(j\omega)$ é uma função complexa e pode ser representada pela magnitude e ângulo de fase com a frequência como parâmetro.

Lembrando!! Polos e Zeros e Função deTransferência

Função deTransferência:

Uma função de transferência é definida como a razão entre a transformada de Laplace da saída para a entrada com todas as condições iniciais iguais a zero. Funções de transferência são definidos apenas para sistemas lineares invariantes no tempo

Considerações:

A Função de transferência pode geralmente ser expressa como a razão de dois polinómios na variável complexa, s.

Fatoração:

A função de transferência pode ser fatorada na seguinte forma:

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

As raízes do polinômio no numerador são chamados <u>zeros</u>.

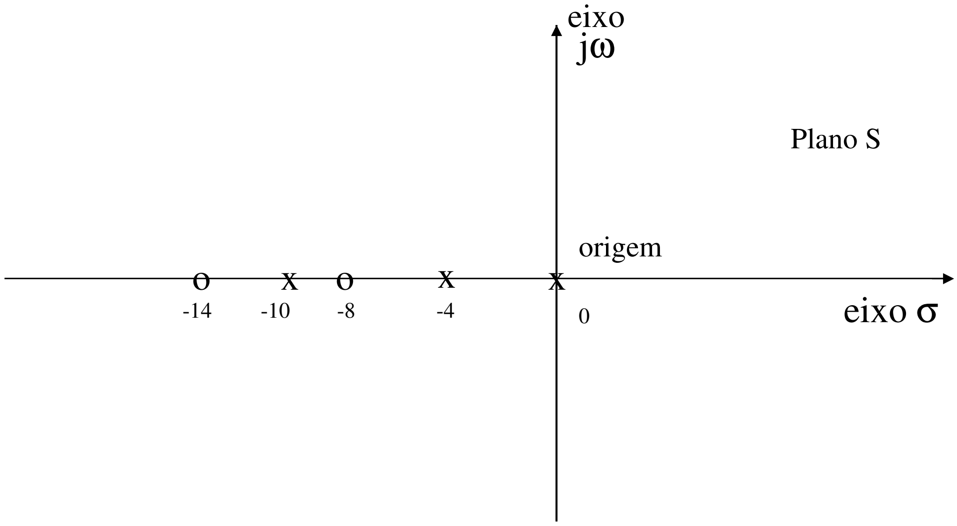
As raízes do polinômio do denominador são chamados <u>pólos</u>.

Lembrando!! **Polos e Zeros e Função deTransferência**

por Exemplo:

Dada a seguinte função de transferência. Mostrar o pólos e zeros no plano s.

$$G(s) = \frac{(s+8)(s+14)}{s(s+4)(s+10)}$$



Lembrando!! **Polos e Zeros e Função de Transferência**

Caracterização: Considerando-se a função de transferência do slide anterior. Note que temos 4 diferentes tipos de termos na forma anterior geral da função de transformada fatorada:
Estes são:

$$K_B, \quad \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{(s/p + 1)}, \quad (s/z+1)$$

Expressando em dB: Dada a função de transferência:

$$G(jw) = \frac{K_B(jw/z+1)}{(jw)(jw/p+1)}$$

$$20\log|G(jw| = 20\log K_B + 20\log|(jw/z+1)| - 20\log|jw| - 20\log|jw/p+1|$$

wlg

Polos e Zeros e Função de Transferência

Ou seja: Temos que considerar 4 termos distintos:

$20\log K_B$

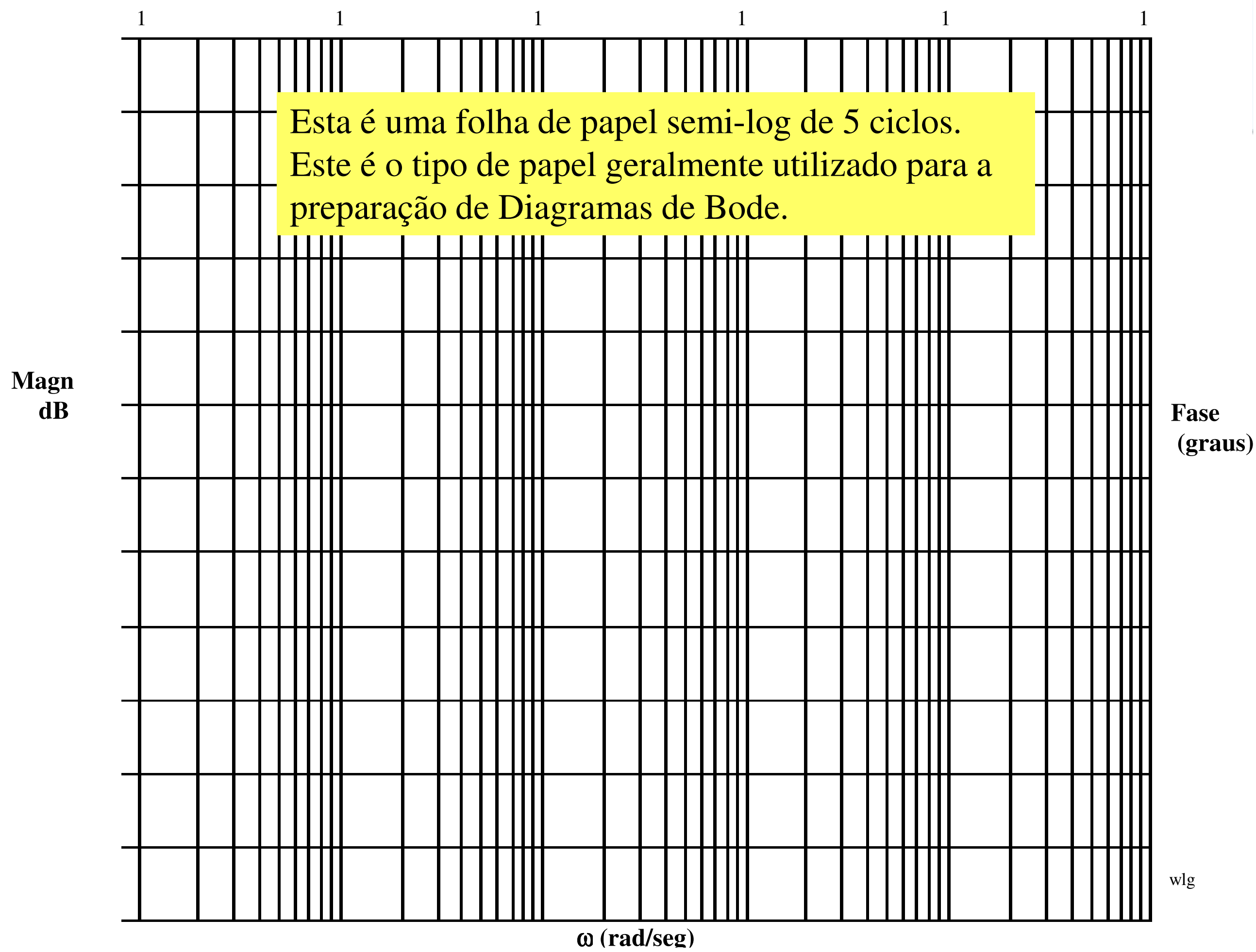
$20\log|(jw/z+1)|$

$-20\log|jw|$

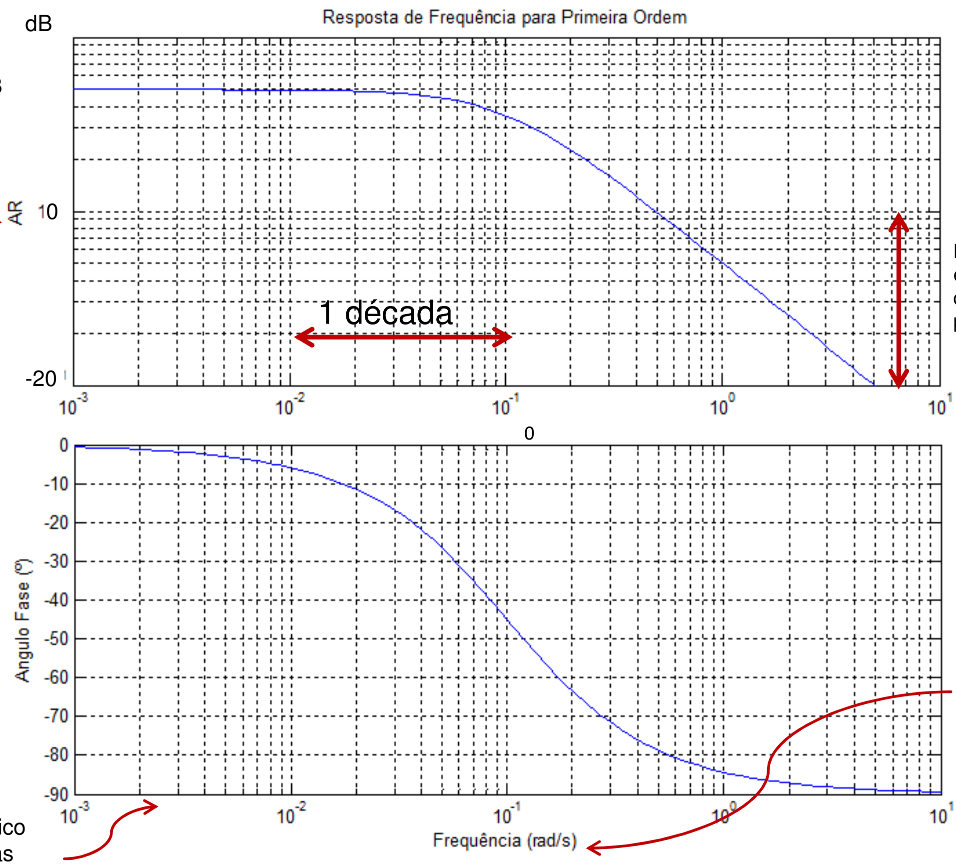
$-20\log|(jw/p+1)|$

wlg

Esta é uma folha de papel semi-log de 5 ciclos.
Este é o tipo de papel geralmente utilizado para a preparação de Diagramas de Bode.



O ganho em dB vem dado por $20 \cdot \log_{10}|G(jw)|$



Baixar/subir 20 dB equivale a dividir/multiplicar por 10

A escala da frequências podem vir em Hz ou em rads/seg (pulsação).

Como trabalhamos com w empregaremos rads/s

Eixo logarítmico de frequências

Preparação do Diagrama de Bode

- Diagrama de Bode usa a função de transferência em malha aberta, G_{OL}
- O diagrama é um par de graficos correspondentes a magnitude e a fase.
  - A representação da magnitude logarítmica é $20.\log|G(j\omega)|$ em dB.

Utilizando:

$$\log\left(\frac{ab}{cd}\right) = \log ab - \log cd = \log a + \log b - \log c - \log d$$

A principal vantagem: **multiplicação** é convertida em **adição**

Fatores básicos de G(jw)

Observação: Caso o termo geral pertença ao denominador, sua contribuição para a magnitude da resposta será negativa

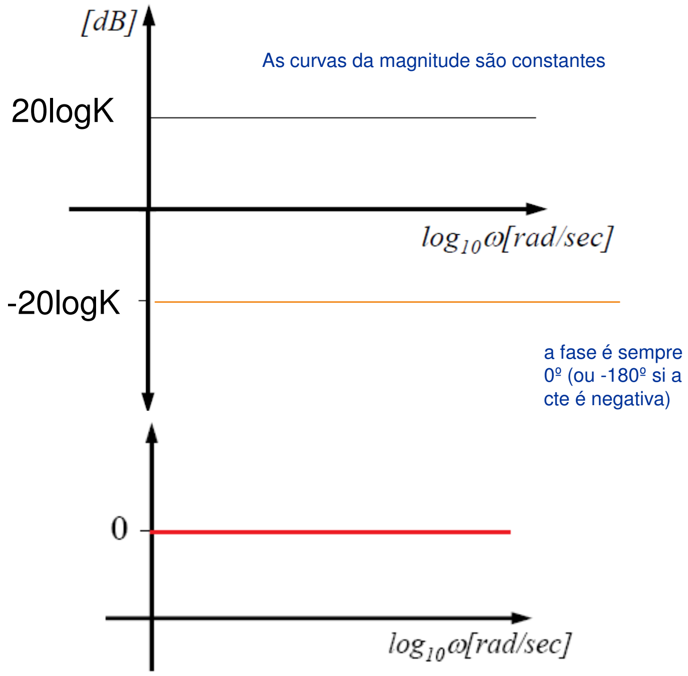
$\Rightarrow$ Fatores das funções de transferência:

- Ganho constante
- Pólos e zeros reais que ocorrem na origem
- Pólos e zeros reais que não ocorrem na origem
- Pólos e zeros complexos

Deve-se prestar atenção para a frequência de corte e da forma da equação deve ser montada

Ganho K

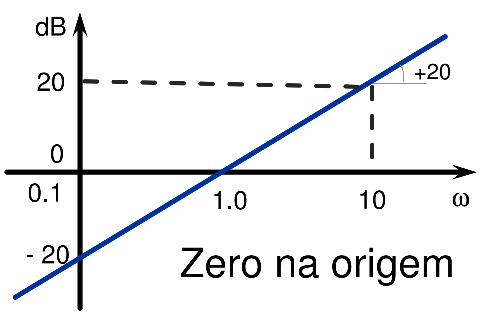
i) Ganho constante, G (s)= K: $dB = 20 \log |K|$

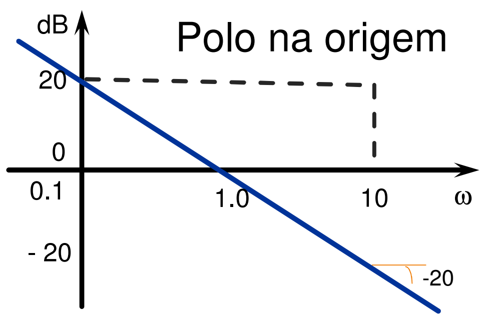


- O log da magnitude do ganho é uma linha reta em 20 log (K)
  - se K > 1, então a magnitude é positiva
  - se K < 1, então a magnitude é negativa
- O ângulo de fase continua sendo o mesmo.
- Inclinação é 0 na frequência de interrupção (ou de canto)

S^n

Fatores s^n tem um diagrama de amplitude que consiste numa linha reta cuja inclinação é igual a 20n[dB/*década*] e fase constante e igual a n $\pi/2$. Esta linha cruza o eixo horizontal (0[dB]) com $\omega = 1$.





- Ângulo de fase = 90º (constante)

$$\angle G = \tan^{-1}(1/0) = \tan^{-1}(\infty) = 90^\circ$$

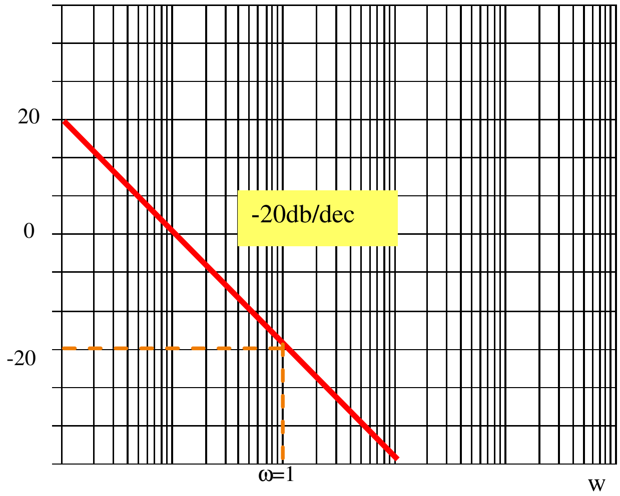
Polos e Zeros e Função de Transferência

Método: O termo do ganho, $20\log K_{B}$, é apenas tantos dB e esta é uma linha reta no papel de Bode, independente do ω (frequência, rad).

O termo - 20log | jw | = - 20logw, quando plotada em papel semi-log é uma linha reta inclinada em - 20dB/década.
Ela tem uma magnitude de 0 em ω = 1.

$$20\log_{10}\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log_{10}|\omega|$$

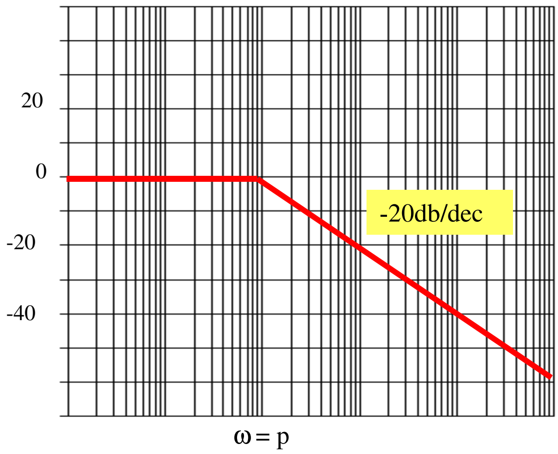
$$\arg\left\{\frac{1}{j\omega}\right\} = -90^{\circ}$$



Polos e Zeros e Função de Transferência

Método: $-20\log\left(\frac{jw}{p+1}\right)$ é traçado seguindo a aproximação:

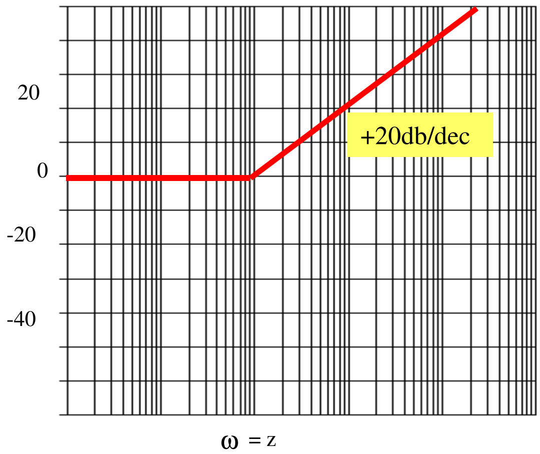
Se ω < p → –20log|(jw/p + 1)| = 0 dB, uma linha reta no Bode.
Se ω > p → –20log(w/p), que se inclina com -20dB/dec iniciando em ω = p, como ilustrado abaixo.



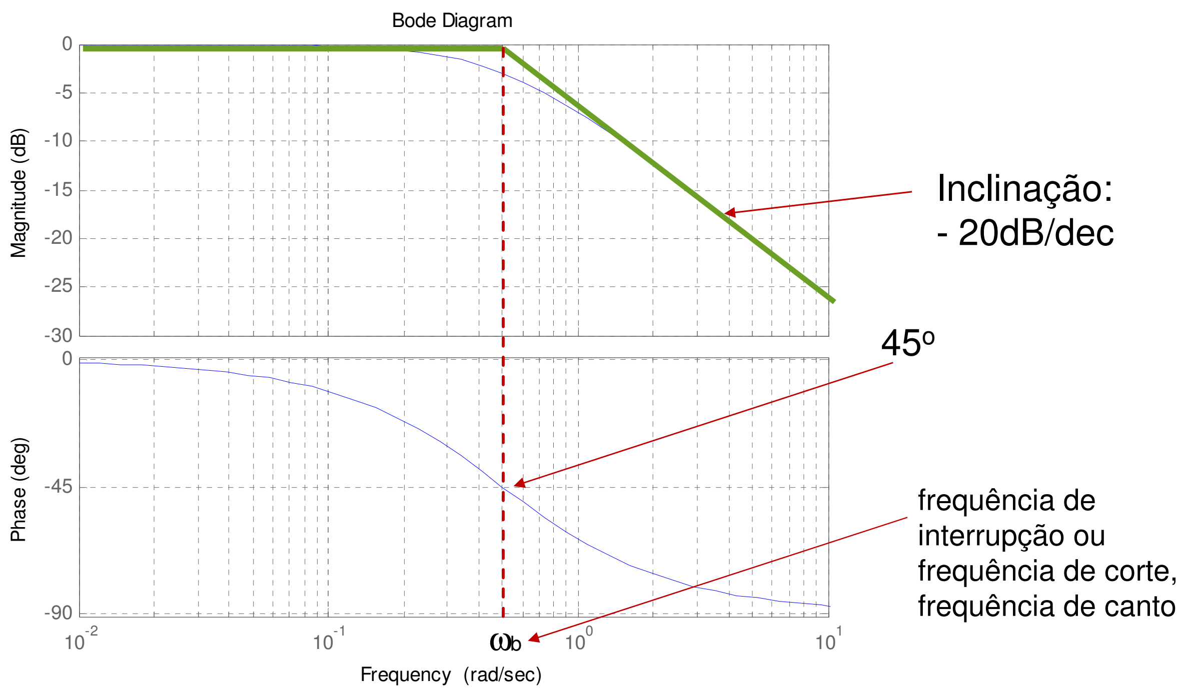
wlg

Polos e Zeros e Função de Transferência

Método: Quando temos um termo de 20log|(jw/z + 1)| nós aprox. a ser uma linha reta de pendente 0 dB/dec
quando w < z.
Aproximamos como 20log(w/z) quando w > z, a que é uma linha reta no Diag. Bode com uma inclinação de +20dB/dec.
Ilustrada abaixo:



Primeira Ordem



Segunda Ordem

Os diagramas de Bode de amplitude e fase com polos complexos conjugados são bastante mais complicados que os de um polo simples. Assim considere a função de transferência:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \qquad 0 < \xi < 1$$

Que pode expressa como:

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1\right)} \xrightarrow{s = j\omega} G(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n} + 1\right)}$$

Diagrama de amplitude:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi j\omega}{\omega_n}\right)^2}} = -20\log\sqrt{\left(1 - \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi j\omega}{\omega_n}\right)^2}\, dB$$

Segunda Ordem

1. para $\omega << \omega_n$, *resulta 20 log(1) = 0[dB], isto é, para baixas* frequências o diagrama de módulo é uma linha reta horizontal (assíntota de baixa frequência).
2. para $\omega >> \omega_n$, *resulta a assíntota de alta frequência dada por*

$$|G(jw)| \cong -20\log\left|\frac{w^2}{w_n^2}\right| dB = -40\log\left|\frac{w}{w_n}\right| dB$$

reta que decai a -40 dB década

3. para $\omega \cong \omega_n$. *Pode-se mostrar que o pico no módulo ocorre perto* da frequência ω_n. *O peso exato bem como a localização podem* ser determinados diferenciando a expressão do módulo da função de transferência em relação à frequência e igualando a zero. O pico ocorre à frequência de ressonância

$$w_r = w_n\sqrt{1 - 2\xi^2}$$

e com amplitude dada por $|G(jw_r)| \approx -20\log(2\xi\sqrt{1-\xi^2})dB$

Segunda Ordem

Desenho de diagramas de Bode assintóticos

Em geral é suficiente representar o pico à frequência ω_n .

Recomendação:

Desenha-se primeiro a assíntota de baixa frequência até à frequência ω_n *e a assíntota de alta frequência a partir dai.*

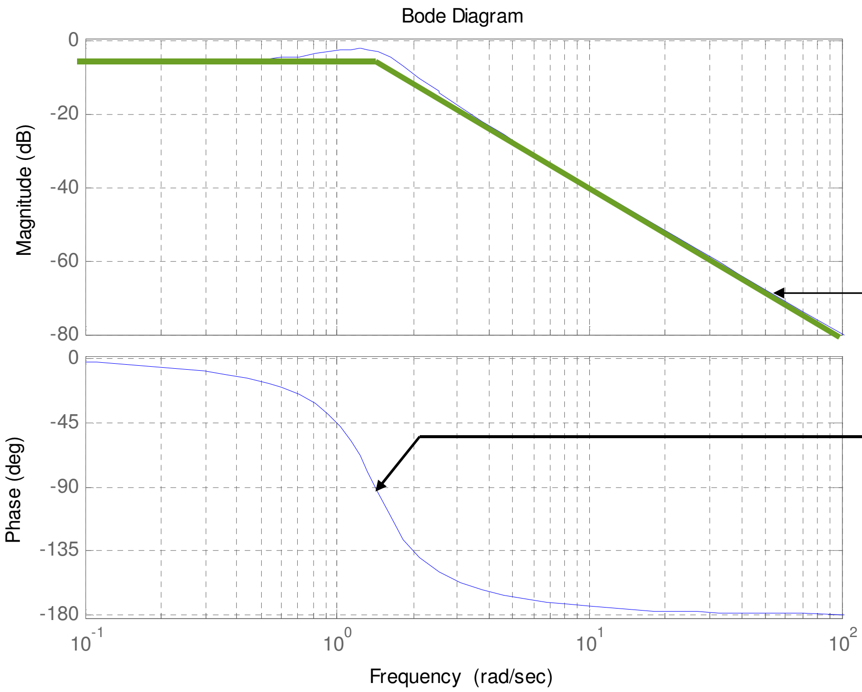
Em seguida desenha-se uma curva suave entre as assíntotas de baixa e alta frequência e que passa pelo valor do pico próximo da frequência ω_n .

Termo quadrático

- Integral:
  - Frequência de quebra $\omega = \omega_n$
  - Inclinação: – 40 dB/década
  - Ângulo de fase é -90º na frequência de quebra
- Derivativo:
  - Frequência de quebra $\omega = \omega_n$
  - Inclinação: 40 dB/década
  - Ângulo de fase é -90º na frequência de quebra
- Frequência Ressonante:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Termo quadrático



$$\left[1+\frac{j\omega}{2}+\frac{(j\omega)^2}{2}\right]^{-1}$$

$\omega_n = \sqrt{2}$

Inclinação = 40dB/dec

Freq corte em 90º
$\omega_n = \sqrt{2}$

Exemplo 1

Plotar Diagrama de Bode, por assintotas para a seguinte FT:

$$G(s)=\frac{10}{s+5}$$

$$G(jw)=\frac{10}{jw+5} \quad =\frac{2}{\frac{jw}{5}+1}$$ = $G_1 . G_2$

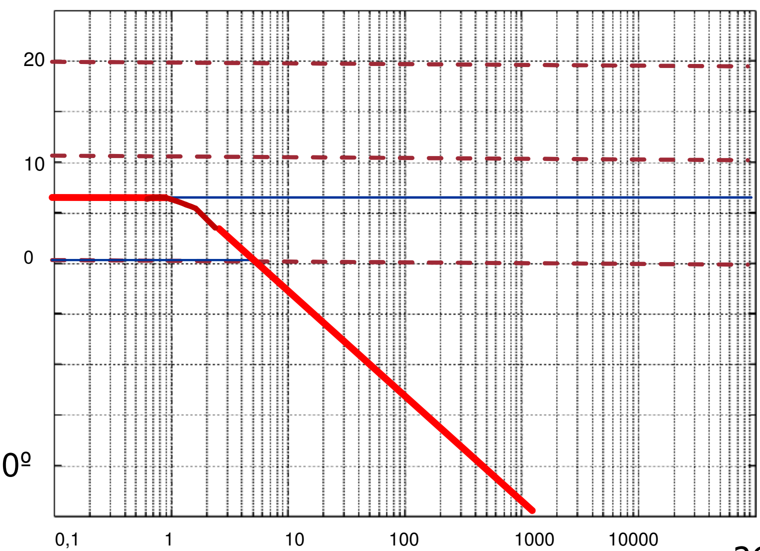
$G_1 = 2$

$|G_1| = 20.\log 2 \cong 6{,}0$

$$G_2=\frac{1}{\frac{jw}{5}+1}$$

$\angle G_1 = -\tan^{-1}(0) = 0º$

$\angle G_2 = 0 - \tan^{-1}(w/5) = -\tan^{-1}(\infty) = -90º$

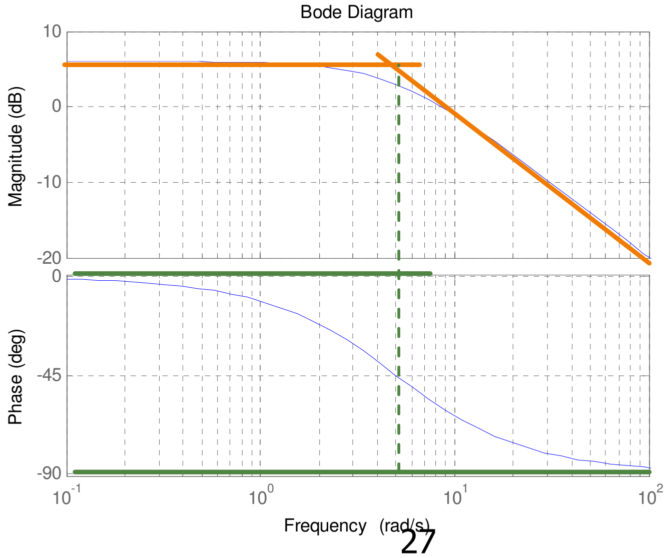


Exemplo 1

Plotar Diagrama de Bode, por assintotas para a seguinte FT: $G(s)=\dfrac{10}{s+5}$

$$G(jw)=\frac{10}{jw+5} \qquad =\frac{2}{\frac{jw}{5}+1} \qquad = G_1 . G_2$$

bode(10,[1,5,0])



$G_1 = 2$

$|G_1| = 20.\log 2 \cong 6{,}0$

$\angle G_1 = -\tan^{-1}(2/0) = -\tan^{-1}(\infty) = -90º$

$$G_2=\frac{1}{\frac{jw}{5}+1}$$

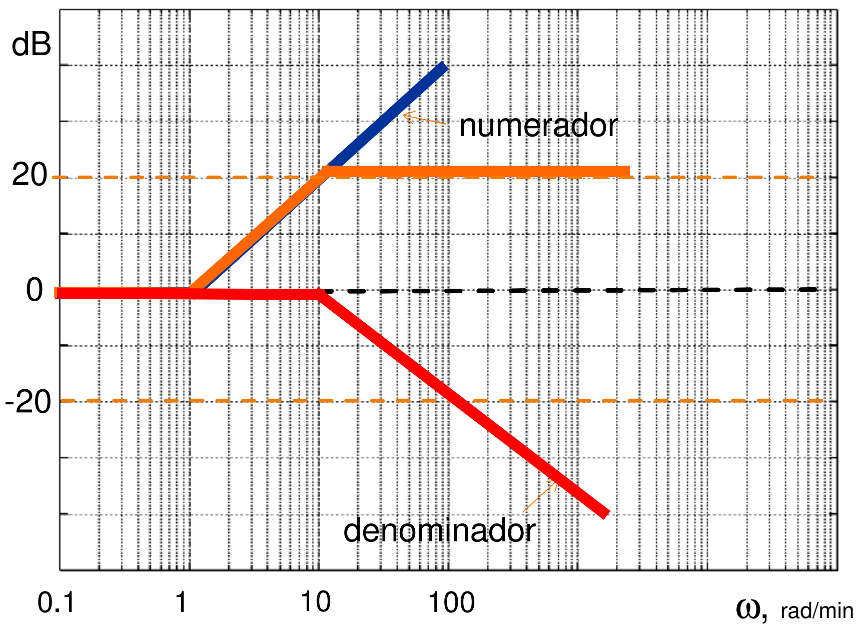
$\angle G_1 = -\tan^{-1}(0) = 0º$

$\angle G_2 = 0 - \tan^{-1}(5w) = -\tan^{-1}(\infty) = -90º$

Primeira Ordem: Diagrama de magnitude

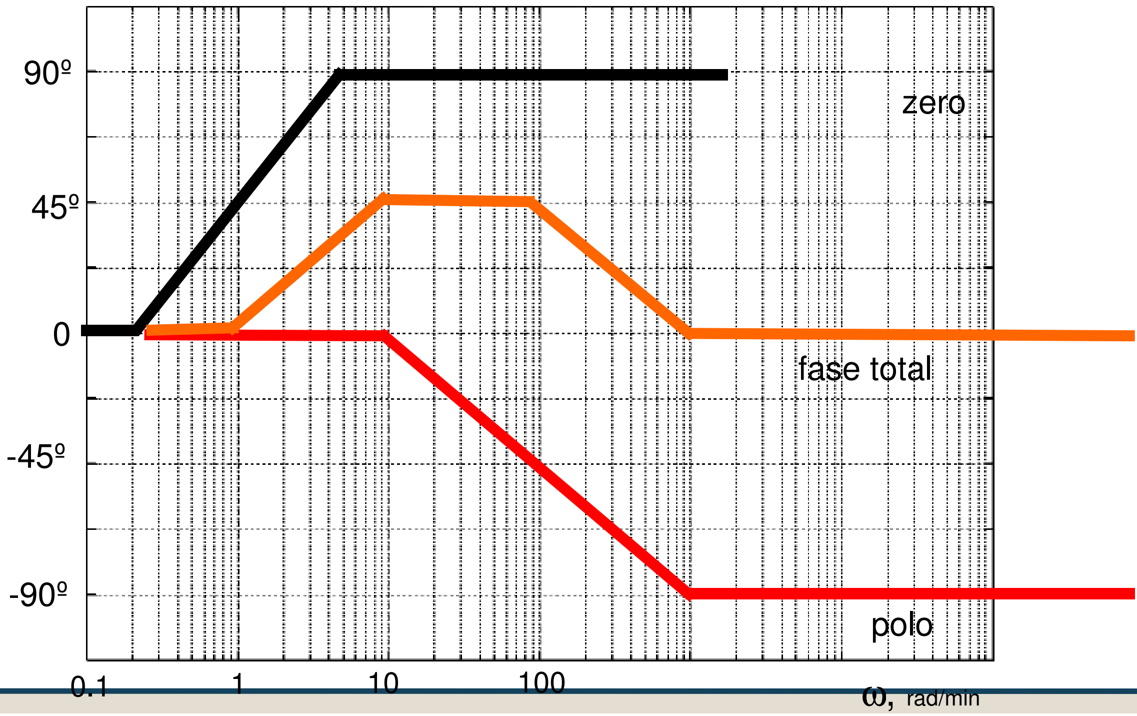
Exemplo 2: $G(s)=\dfrac{10\cdot(s+1)}{s+10}=\dfrac{s+1}{\frac{s}{10}+1}$

s = *jw*



Primeira Ordem: Diagrama de fase

Exemplo 2: $G(s) = \dfrac{s+1}{s/10+1}$



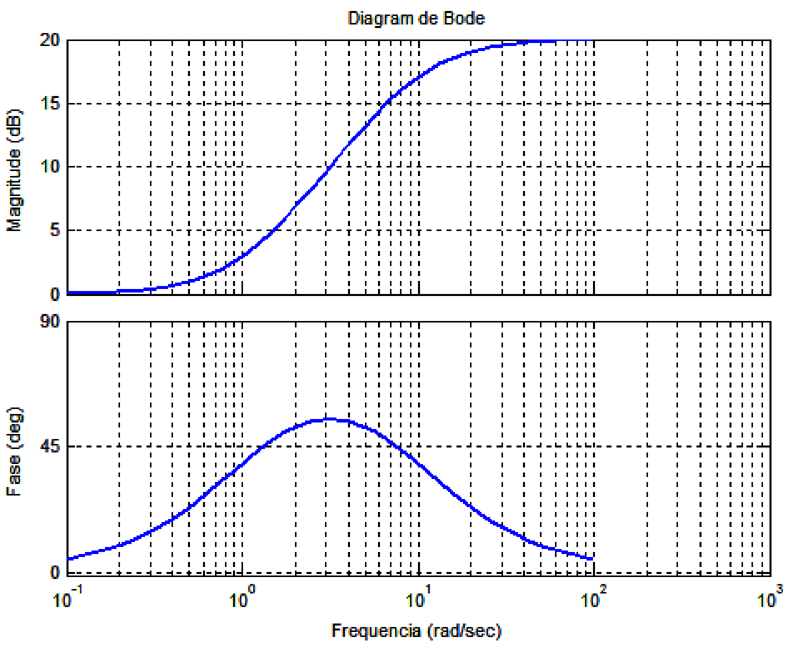
Exemplo 2: $G(s) = \dfrac{s+1}{s/10+1}$

```
>> num= [1 1];
den= [0.1 1];
sys = tf(num,den);
bode(sys)
```

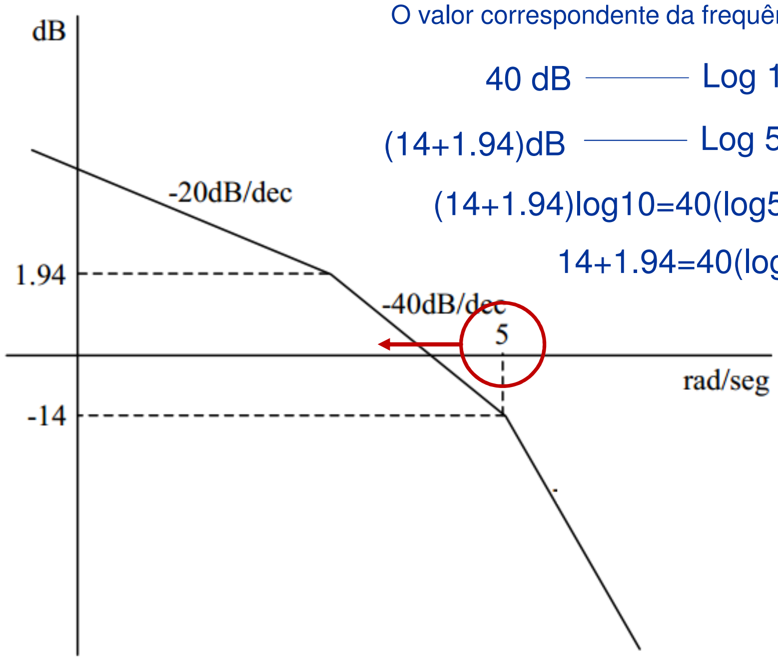
$$G(jw) = \frac{jw+1}{jw/10+1}$$

$$|G(jw)| = \frac{\sqrt{w^2+1}}{\sqrt{\frac{w^2}{100}+1}}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{9w}{10+w^2}\right)$$



Exemplo 3: Determinar a função de transferência, G(s) a partir da resposta de frequência da malha aberta de um sistema indicado pelo modulo representado no seguinte desenho:



O valor correspondente da frequência de corte anterior:

$40\ dB$ ——— $\log 10$

$(14+1.94)dB$ ——— $\log 5 - \log\omega_1$

$(14+1.94)\log 10 = 40(\log 5 - \log\omega_1)$

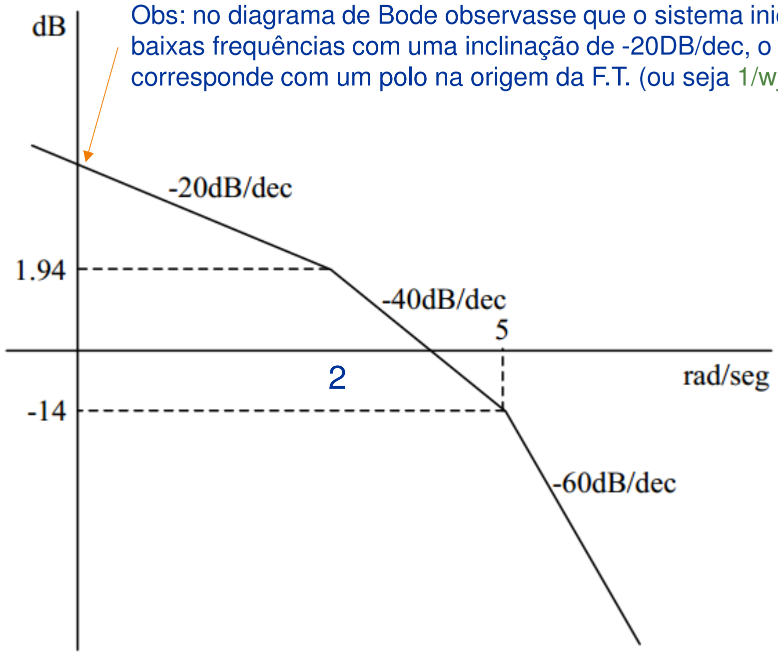
$14+1.94 = 40(\log 5/\omega_1)$

$10^{\frac{15.94}{40}} = 5/\omega_1$

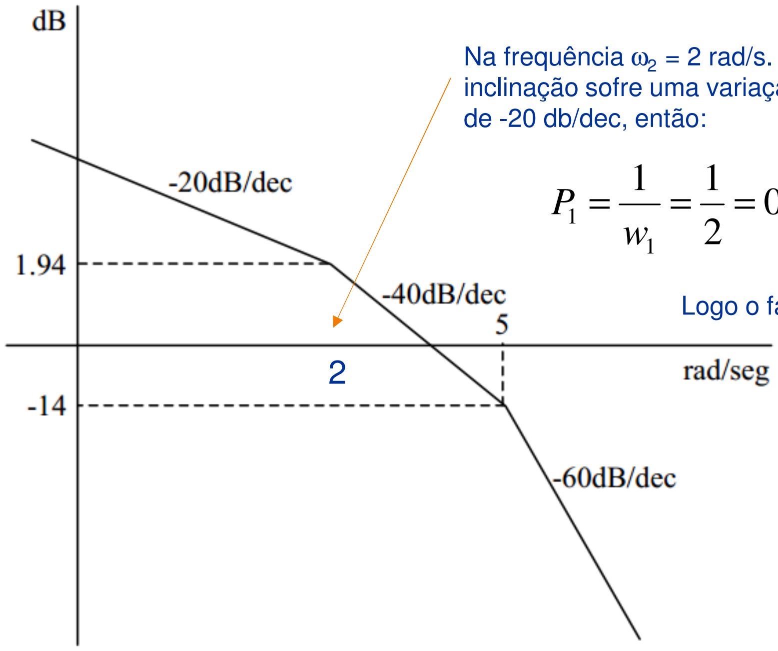
$\omega_1 = 2rad/s$

Exemplo 3: Determinar a função de transferência, G(s) a partir da resposta de frequência da malha aberta de um sistema indicado pelo modulo representado no seguinte desenho:

Obs: no diagrama de Bode observasse que o sistema inicia para baixas frequências com uma inclinação de -20DB/dec, o que corresponde com um polo na origem da F.T. (ou seja 1/wj)



Exemplo 3: Determinar a função de transferência, G(s) a partir da resposta de frequência da malha aberta de um sistema indicado pelo modulo representado no seguinte desenho:

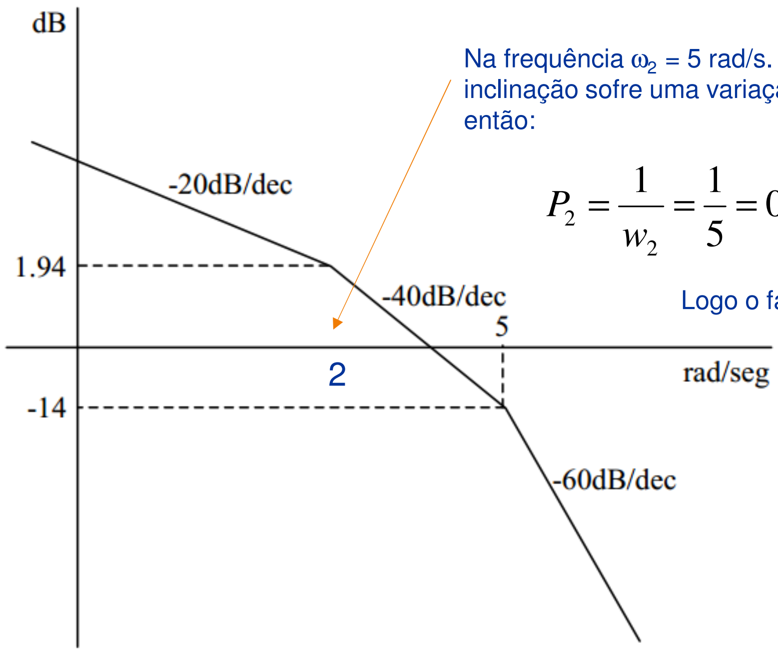


Na frequência ω_2 = 2 rad/s. a inclinação sofre uma variação de -20 db/dec, então:

$$P_1 = \frac{1}{w_1} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Logo o fator é (1 +0,5jw)

Exemplo 3: Determinar a função de transferência, G(s) a partir da resposta de frequência da malha aberta de um sistema indicado pelo modulo representado no seguinte desenho:



Na frequência ω_2 = 5 rad/s. a linha da inclinação sofre uma variação de -20 db/dec, então:

$$P_2 = \frac{1}{w_2} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Logo o fator é (1 +0,2jw)

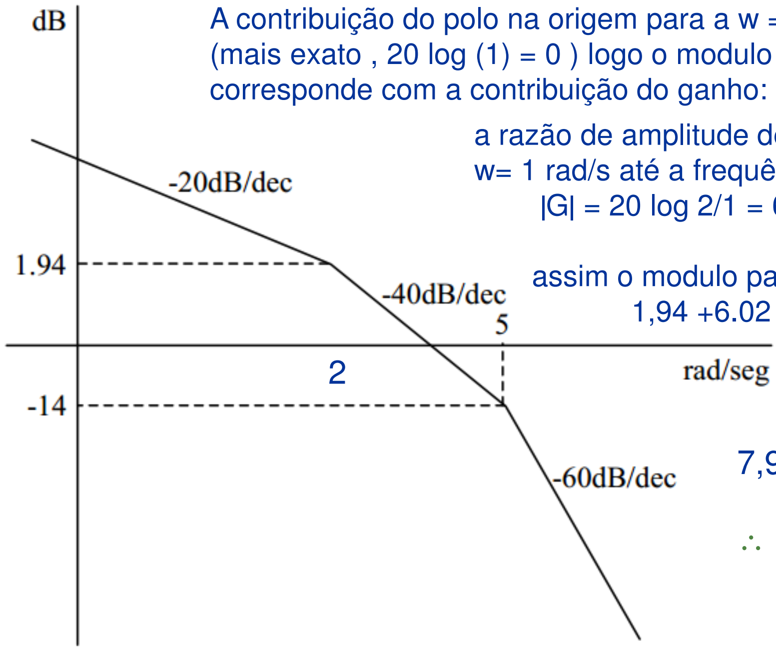
Exemplo 3: Determinar a função de transferência, G(s) a partir da resposta de frequência da malha aberta de um sistema indicado pelo modulo representado no seguinte desenho:

Agora alta ajustar o ganho da função de transferência.
A contribuição do polo na origem para a w = 1rad/s é de 0 dB (mais exato , 20 log (1) = 0) logo o modulo em dita frequência corresponde com a contribuição do ganho:

a razão de amplitude desde na frequência w= 1 rad/s até a frequência w_1= 2rad/s é:
|G| = 20 log 2/1 = 6,02 dB

assim o modulo para w = 1 rad/s será :
1,94 +6.02 = 7,96dB

$7.96 = 20 \log k$



7,96dB = 20 logK

∴ K = 2,5

Exemplo 3: Determinar a função de transferência, G(s) a partir da resposta de frequência da malha aberta de um sistema indicado pelo modulo representado no seguinte desenho:

Por tanto, G(jw):

$$G(jw) = \frac{2,5}{jw(1+0,2\,jw)(1+0,5\,jw)}$$

Em termo da transformada de Laplace, G(s):

$$G(s) = \frac{2,5}{s(1+0,2s)(1+0,5s)}$$

ou

$$G(s) = \frac{25}{s(1+2s)(1+5s)}$$

$$G(jw) = \frac{2{,}5}{jw(1+0{,}2\,jw)(1+0{,}5\,jw)}$$