Departamento de Engenharia Química e de Petróleo – UFF
Disciplina: TEQ102- CONTROLE DE PROCESSOS

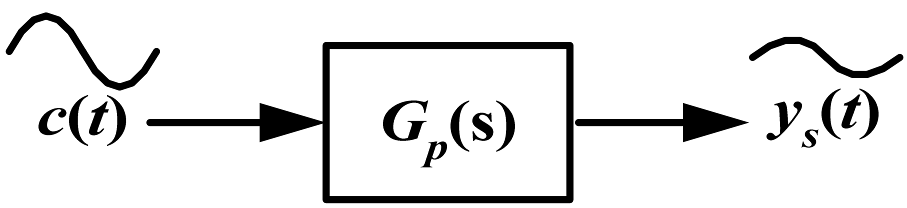
Método de Margem de Ganho e de Fase

Profª Ninoska Bojorge

Resposta de Frequência

Relembrando

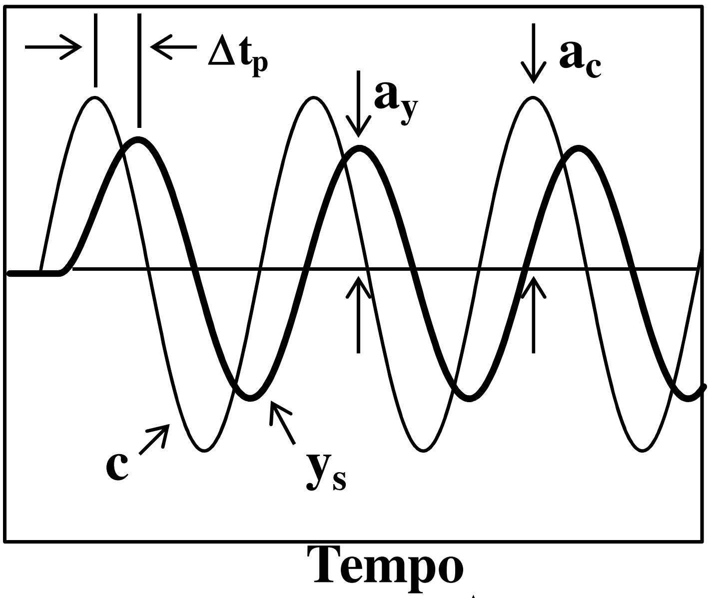
Quando um Processo é submetido a uma entrada senoidal



Resposta de Frequência

Relembrando

Os principais componentes da Análise de Resposta de Frequência



$$A_r = \frac{a_y}{a_c} \qquad \phi = \frac{\omega\ \Delta t_p}{2\pi} \times 360°$$

Resposta de Frequência

Diagrama de Bode: Um meio conveniente de apresentar AR e ϕ contra ω

Relembrando

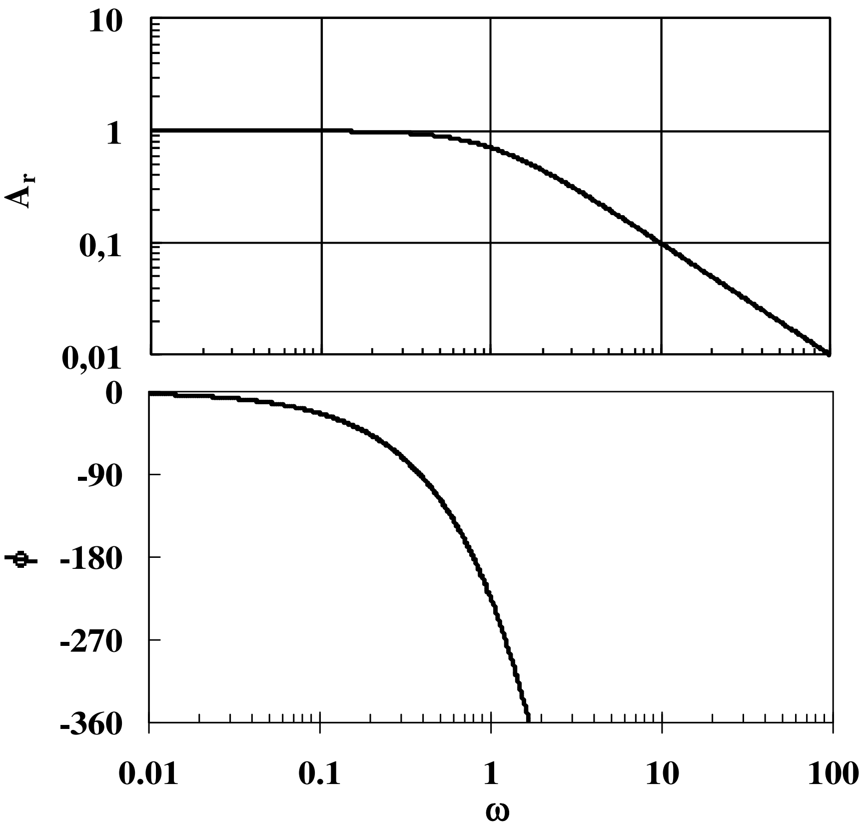


Diagrama de Bode

Relembrando

Para gerar o Diagrama de Bode

- Perturbação direta no processo.
- Combinar a função de transferência do processo com entrada senoidal.
- Substituir s = j ω em G(s) e converter os componentes reais e imaginários que produzem AR (ω) e ϕ (ω).
- Aplicar um teste de pulso.

Diagrama de Bode

Relembrando

O desenvolvimento de um diagrama de Bode a partir da função de transferência

$$G_p(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

$$A_r(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right]$$

Diagrama de Bode

Derivação da curva de Bode para um processo de Primeira Ordem

Relembrando

$$G_p(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \rightarrow G_p(j\omega) = \frac{K_p}{j\omega\tau_p + 1}$$

Propriedades de uma função

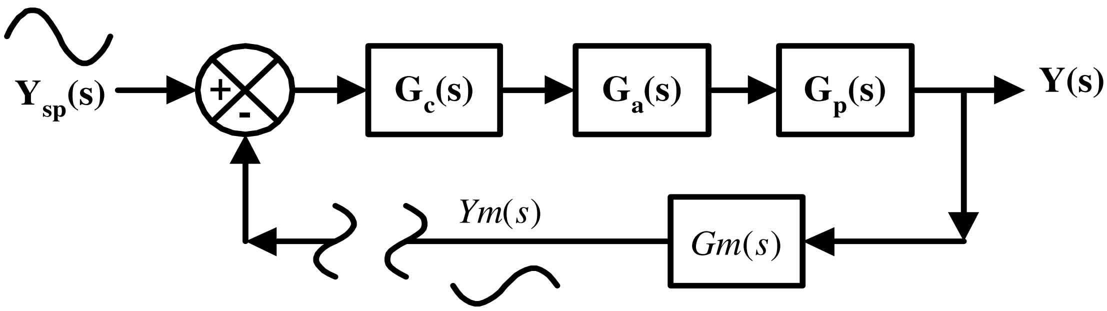
Relembrando

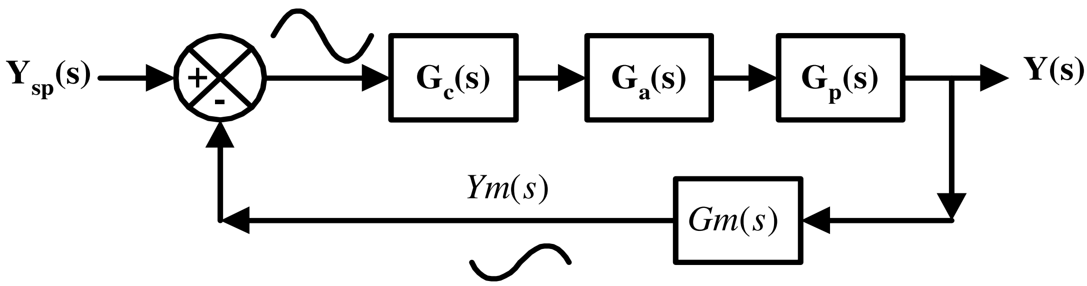
Considere $$G_p(s) = \frac{G_a(s)\, G_b(s)}{G_c(s)\, G_d(s)}$$

$$A_r = \frac{|G_a(s)||G_b(s)|}{|G_c(s)||G_d(s)|}$$ ou

$$\log[A_r(\omega)] = \log|G_a(j\omega)| + \log|G_b(j\omega)| - \log|G_c(j\omega)| - \log|G_d(j\omega)|$$

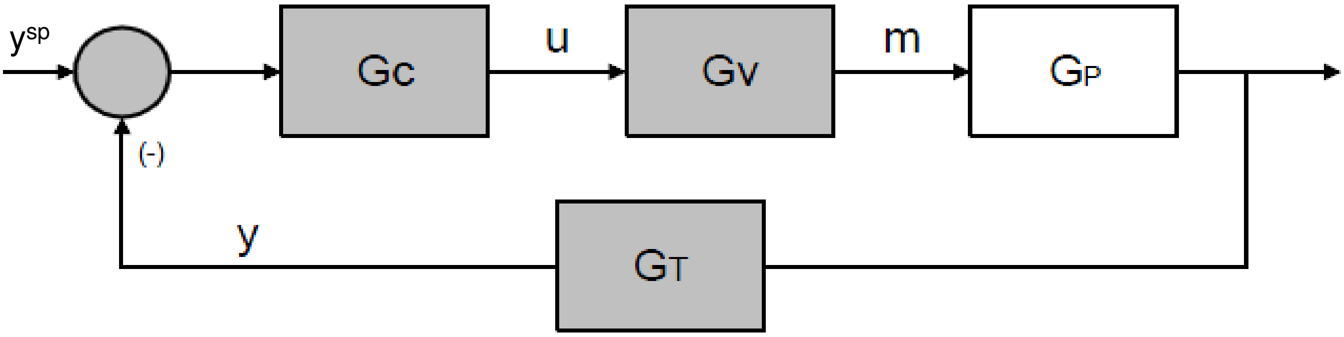
Critério de Estabilidade de Bode





Critério de estabilidade de Bode

Métodos de Margem de Ganho e Fase



$$1 + G_{OL} = 1 + G_C G_V G_P G_T = 0$$

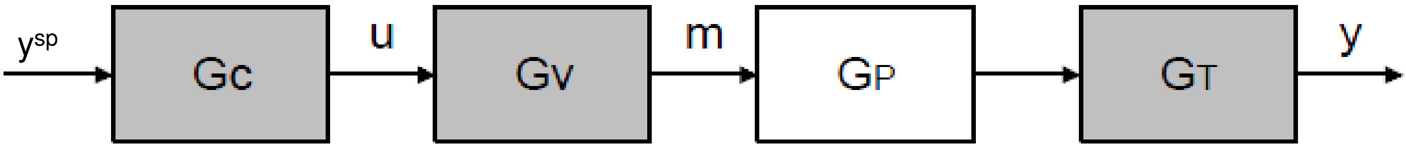
Malha Fechada

Critério de estabilidade de Bode

Métodos de Margem de Ganho e Fase

Os diagramas de bode são desenhados utilizando-se a função de transferência da malha aberta.

Vantagem: evita calcular a função de transferência da malha fechada. Desta forma é possível fazer a análise do sistema em malha fechada, verificando apenas a função de transferência em malha aberta.



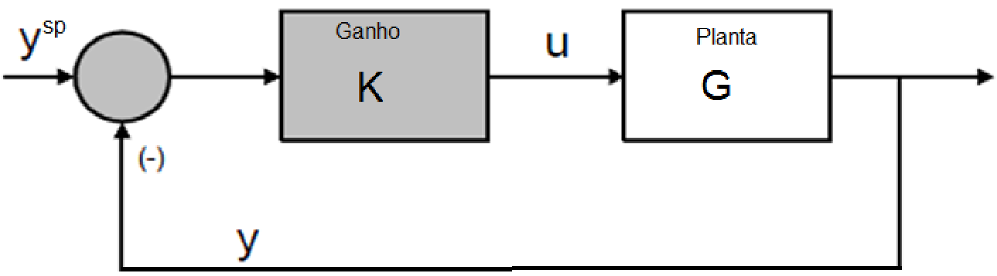
$$G_{OL} = G_C G_V G_P G_T$$

Malha Aberta

Critério de estabilidade de Bode

Métodos de Margem de Ganho e de Fase

Vamos dizer que nós temos o seguinte sistema:
em que K é um ganho (constante) e G(s) é a FT da planta em questão.



Malha Fechada Simplificada

Análise de Resposta de Frequência

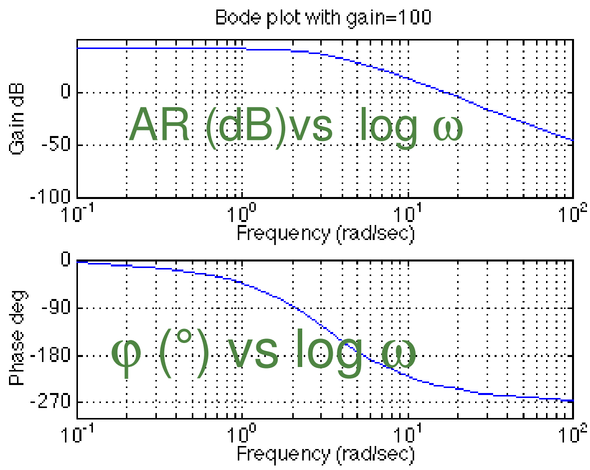
Geralmente

Desenha-se

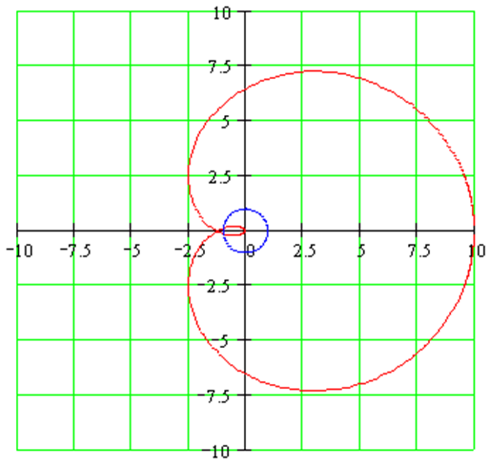
Aprendemos

Não veremos neste curso

Diagrama de Bode



Diagramas Polares



Magnitude e fase com ω variando entre 0 e ∞

Análise de Resposta de Frequência

Aprendemos a obter a estabilidade de um sistema mediante os métodos de estabilidade no plano *s*

estabilidade absoluta do sistema

$$1 + G_{OL} = 1 + G_C G_V G_P G_T = 0$$

o sistema é estável ou sistema não é estável

Para saber quão estável é o sistema $\rightarrow$ **estabilidade relativa**

A estabilidade relativa dá ideia de quão perto ou longe está o sistema do limite de estabilidade

Acostuma-se expressá-la em MARGEM DE GANHO E MARGEM DE FASE

Critério de estabilidade de Bode

- Um sistema é estável se AR é menor que 1.0 na frequência crítica (i.e, w que corresponde à φ = -180 °)

- Estabilidade malha fechada de um sistema pode ser analisado pelo critério de Estabilidade de Bode para o produto das funções de transferência do controlador e do processo, ou seja, Gc (s).Gp (s).

Critério de estabilidade de Bode

Margem de Ganho (MG ou K_g)

- Define-se como a variação requerida no ganho da ***malha aberta*** para atingir o sistema à instabilidade.

- Sistemas com margens de ganho grande podem suportar grandes mudanças nos parâmetros do sistema antes de atingir a instabilidade em malha fechada.

Tenha em conta que um ganho unitário na magnitude equivale a zero dB.

Margem de Ganho (MG ou K_g)

- A margem do ganho de um sistema de primeira ou segunda ordem é infinito, mas os diagramas polares para esses sistemas não cruzam o eixo real negativo. Por tanto, em teoria os sistemas de primeira ou segunda ordem não podem ser instáveis.

- Não obstante, nota-se que tais sistemas de 1ª e 2ª ordem são só aproximações no sentido de que se desprezam pequenos retardos ao deduzir as equações do sistema. Se tem-se em conta esses pequenos retardos, os sistemas de primeira ou segunda ordem podem tornar-se instáveis.

Margem de Ganho (*MG ou K_g*)

A margem de ganho é o reciproco de $|G(jw)|$ na frequência onde o ângulo de fase é -180º.

Se define a **frequência de oscilação** como a frequência na qual o ângulo de fase da função na malha aberta é igual a -180 º.

A margem de ganho Kg , se expressa como :

$$Kg = \frac{1}{|G(jw)|}$$

Em termos de decibelios será:

$$Kg[dB] = 20\log Kg = -20\log|G(jw)|$$

Para um sistema estável de fase mínima, a margem do ganho indica quanto ganho se pode aumentar antes de que se torne instável o sistema.

Margem de Fase (PM)

Margem de Fase (PM)

A margem de Fase, PM, é outra especificação comumente associada com o procedimento da resposta de um sistema no dominio da frequência.

A margem de fase é a diferença entre – 180° e o ângulo de fase função de transferência de malha aberta na frequência de cruzamento cujo módulo tem o valor unitário (ou seja, 0 dB):

$$PM = 180 + \varphi_{AR=1}$$

Parâmetros Críticos

Para um sistema instável, a margem de ganho é indicativo de quanta ganho se deve diminuir para fazer estável o sistema.

No diagrama de Bode é possível visualizar estes margens. Tal como se vê na seguinte figura encontramos a margem de ganho quando a fase atinge os -180º e encontramos a margem de fase quando o ganho atinge os 0 dB.

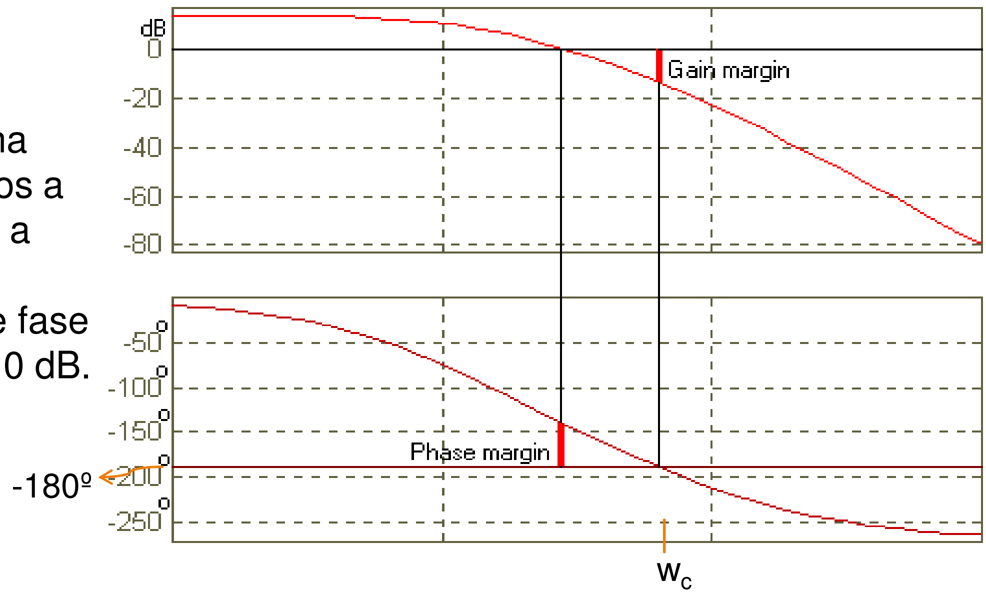


Figura 3

Características Resposta de Frequência dos Controladores

Lembre-se que a R. F caracteriza-se por

1. Razão de Amplitude (*AR*)
2. Ângulo de fase (ϕ)

Para qq F.T , G(s)

$$AR = |G(j\omega)|$$

$$\phi = \angle G(j\omega)$$

A) Controlador Proportional

$$G_C(s) = K_C \qquad \therefore AR = |K_C|, \quad \phi = 0$$

B) Controlador PI

Para $\quad G_C(s) = K_C\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) \qquad AR = K_C\sqrt{\frac{1}{\omega^2\tau_I^{\ 2}} + 1}$

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\tau_I \omega}\right)$$

Resposta de Frequência de Controlador
- Margens de Estabilidade -

Analisar $G_{OL}(s) = G_C G_V G_P G_M$ (ganho malha aberta)

Três métodos em uso:

(1) Diagrama de Bode |*G*|, ϕ vs. ω (R.F. malha aberta)
(2) Diagrama de Nyquist – gráfico polar de $G(j\omega)$ - Anexo J (Seborg)
(3) Carta de Nichols chart |*G*|, ϕ vs. *G*/(1+*G*) (R.F. malha fechada) - Anexo J (Seborg)

Vantagens:

- não necessitam de calcular raízes da equação característica
- podem ser aplicadas a sistemas com tempo morto
- pode identificar margem de estabilidade, ou seja, que tão perto se esta da instabilidade.

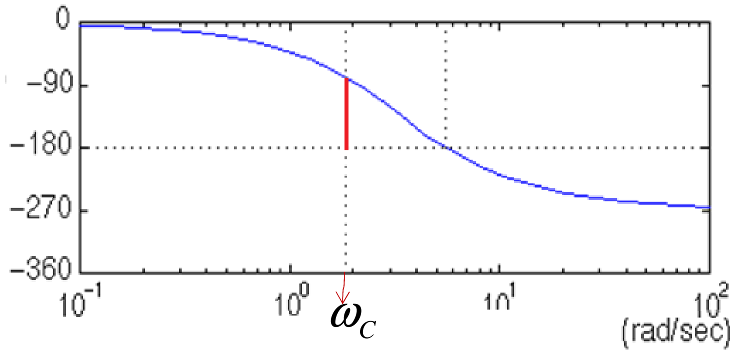
Critérios de Estabilidade de Resposta de Frequência

Dois resultados principais:

1. Critério de estabilidade de Bode
2. Critério de estabilidade de Nyquist

I) Critério de estabilidade de Bode

Um sistema de malha fechada é instável se a RF da F.T malha aberta. $G_{OL}=G_C G_P G_V G_M$, tem uma **razão de amplitude maior que 1** na frequência critica, ω_C . Caso contrário, o sistema de malha fechada é estável.



Note: ω_C = valor de ω quando o ângulo de fase em malha aberta é -180º.

As margens de ganho e de fase são medidas de estabilidade relativa.

Critérios de Estabilidade de Resposta de Frequência

Assim,

• O Critério de Estabilidade de Bode fornece informação sobre malha fechada e informação da estabilidade da R.F malha aberta.

2. Critério de Estabilidade de Nyquist

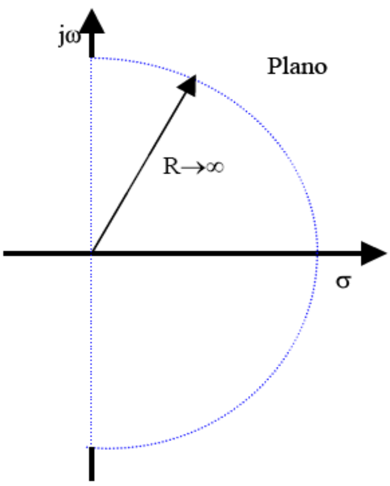


Figura 8

dependerá da localização das equação característica no plano s, ou seja da localização dos pólos da eq. característica.
Se todos os pólos estiverem localizados no semiplano esquerdo do plano s, o sistema será absolutamente estável.
O critério de estabilidade originalmente proposto por Nyquist utiliza o princípio do argumento considerando como caminho fechado a ser percorrido, conforme a Figura 8, todo o semiplano direito do plano s.

A margem de ganho representa o fator mediante o qual o ganho total da malha deve aumentar-se para fazer que o sistema se torne instável.

O ganho do controlador que produz uma margem de ganho determinado se calcula da seguinte maneira:

$$K_c = \frac{K_{cu}}{GM} = \frac{K_{cu}}{K\,(GM)\,MR\,|_{\theta=-180°}}$$

Sendo K, o produto dos ganhos de todos os outros elementos na malha.

Uma especificação típica é que $GM \geq 2$. *Obsérvese que a sintonia de um* controlador proporcional com GM = 2 é a mesma regra de sintonia de Ziegler-Nichols para uma razão de decaimento de um quarto.

Ganho ultimo e período críticos

Ganho ultimo: K_{CU} = valor máximo de $|K_C|$ que resulta em um sistema em malha fechada estável quando é usado somente o controle proporcional.

- **Período ultimo**:

$$\boxed{P_U \equiv \frac{2\pi}{\omega_C}}$$

- K_{CU} pode ser determinado da RFMA quando o controle usado é proporcional com $K_C = 1$. Assim

$$\boxed{K_{CU} = \frac{1}{AR_{OL}\big|_{\omega=\omega_C}} \qquad \text{para} \quad K_C = 1}$$

- Nota: sistemas de primeira e de segunda ordem (sem tempo morto) não têm um valor K_{CU} , se a ação do controlador PID é incorreto.

Margem de Ganho e Margem de Fase

A margem de ganho (*MG*) e margem de fase (*MF*) fornecem medidas do sistema malha fechada no seu limite de estabilidade.

- <u>Margem de ganho :</u>

seja $A_C = AR_{OL}$ em $\omega = \omega_C$. Logo, a margem do ganho é definido como: $MG = 1/A_C$

Critério de estabilidade do Bode, $MG > 1 \Leftrightarrow$ estabilidade

- <u>Margem de fase :</u>

seja ω_g = frequência na qual $AR_{OL} = 1.0$ e o correspondente do angulo de fase angulo é ϕ_g . A margem de fase é definida como:

$MF = 180° + \phi_g$

Critério de estabilidade Bode, $MF > 0 \Leftrightarrow$ estabilidade

ver Figure 14.12.(Seborg)

Margem de Ganho e Margem de Fase

A margem de ganho (*MG*) e margem de fase (*MF*) fornecem medidas do sistema malha fechada no seu limite de estabilidade.

- <u>Margem de ganho :</u>

seja $A_C = AR_{OL}$ em $\omega = \omega_C$. Logo, a margem do ganho é definido como: $MG = 1/A_C$

Critério de estabilidade do Bode, $MG > 1 \Leftrightarrow$ estabilidade

- <u>Margem de fase :</u>

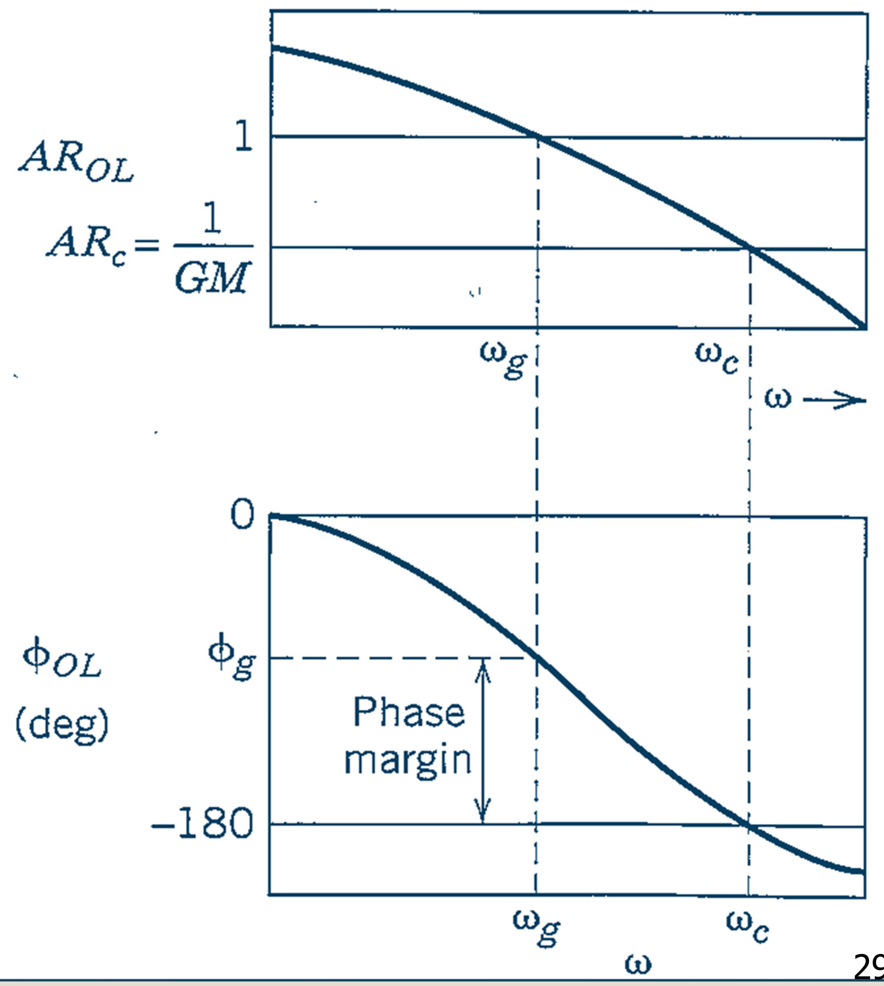
seja ω_g = frequência na qual $AR_{OL} = 1.0$ e o correspondente do angulo ... mo:

MF =

ou seja,
Margem de ganho abaixo de 0 dB e da fase por encima dos -180º, o sistema é estável

Critério de estabilidade Bode, $MF > 0 \Leftrightarrow$ estabilidade

ver Figure 14.12.(Seborg)



Exemplo 1:

Seja um processo que tem a F.T, $$G_p(s) = \frac{2}{(0.5s+1)^3}$$

E $G_V = 0.1$, $G_M = 10$. Se o controle proporcional é usado, determine A estabilidade malha fechada para 3 valores de K_c: 1, 4, e 20.

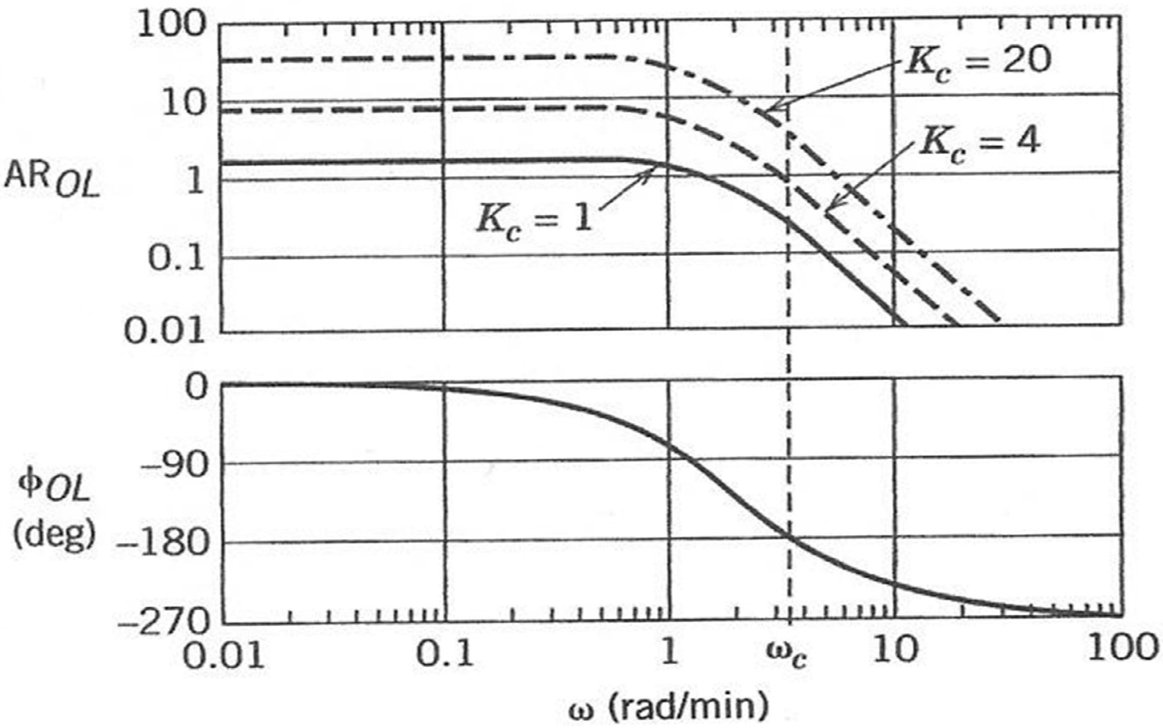
Solução:

A FTMA é $G_{OL}=G_C G_P G_V G_M$ ou...

$$G_{OL}(s) = \frac{2K_C}{(0.5s+1)^3}$$

Os diagramas de Bode para os 3 valores de Kc são apresentados na seguinte figura.
Nota: As curvas de ângulo de fase são idênticas. A partir do diagrama de Bode observa-se:

Figura 9 - Diagrama de Bode para $G_{OL} = 2K_c/(0.5s + 1)^3$.



K_C	AR_{OL}	estável?
1	0,25	sim

- Para o controle Proporcional, o melhor ganho K_{cu} é definido como sendo o maior valor de K_c que resulta em um sistema malha fechada estável.
- Para o controle Proporcional, $G_{OL}= K_cG$ e $G = G_vG_pG_m$.

$$AR_{OL}(\omega)=K_c\, AR_G(\omega)$$

onde, AR_G denota a razão de amplitude de G.

- no limite da estabilidade, $\omega = \omega_c$, $AR_{OL}(\omega_c) = 1$ e $K_c= K_{cu}$.

$$\boxed{K_{cu} = \frac{1}{AR_G(\omega_c)}}$$

Exemplo 2

Determine a estabilidade do sistema malha fechada,

$$G_p(s) = \frac{4e^{-s}}{5s+1}$$

onde $G_V = 2.0$, $G_M = 0.25$ e $G_C = K_C$. Encontrar ω_C do diagrama de Bode. Qual é o valor maximo de K_c para um sistema estavel?

Solução:

O diagrama de Bode para K_c= 1 é mostrado na seguinte figura

$$\omega_C = 1.69 \text{ rad/min}$$

$$AR_{\text{OL}}\Big|_{\omega=\omega_C} = 0.235$$

$$\therefore K_{C\max} = \frac{1}{AR_{OL}} = \frac{1}{0.235} = 4.25$$

$$\omega_C = 1.69 \text{ rad/min}$$

$$AR_{\text{OL}}\Big|_{\omega=\omega_C} = 0.235$$

$$\therefore K_{C\max} = \frac{1}{AR_{OL}} = \frac{1}{0.235} = 4.25$$

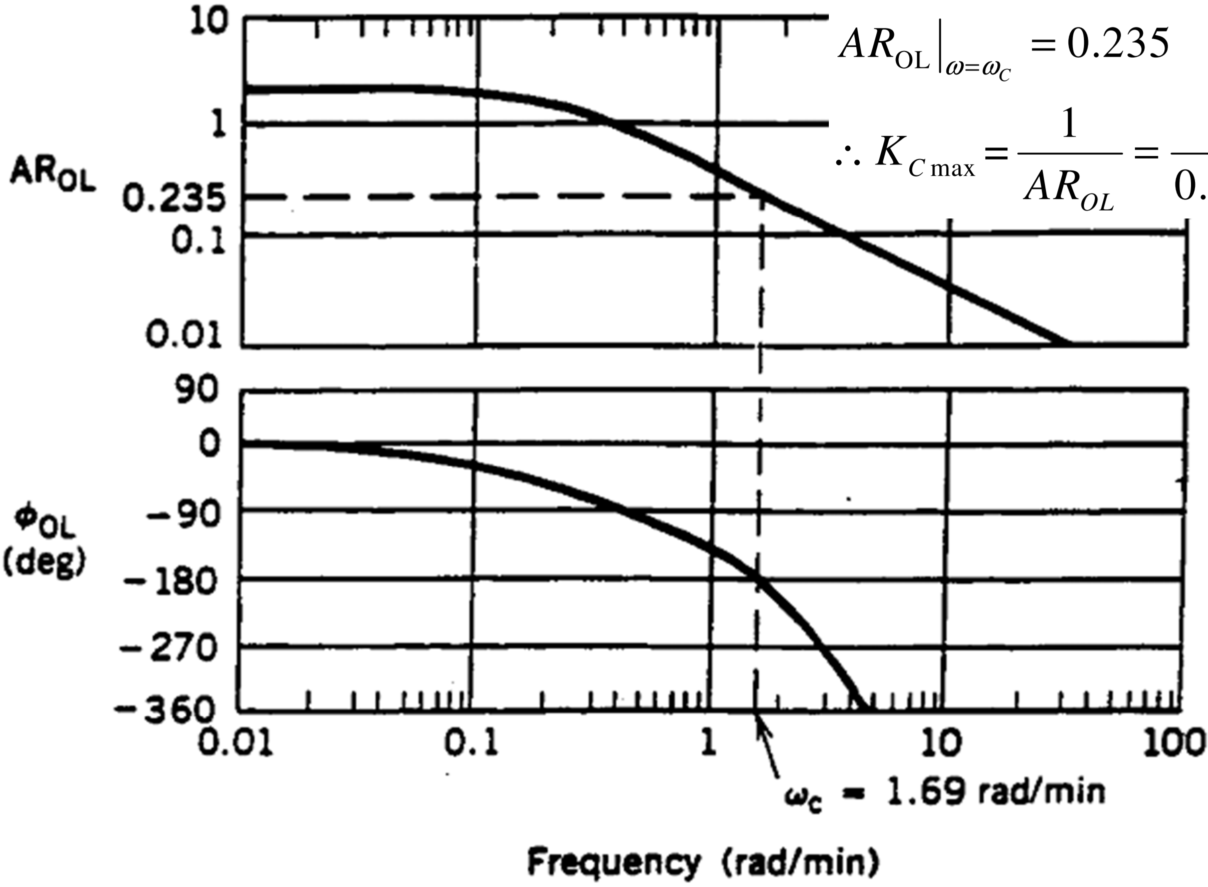
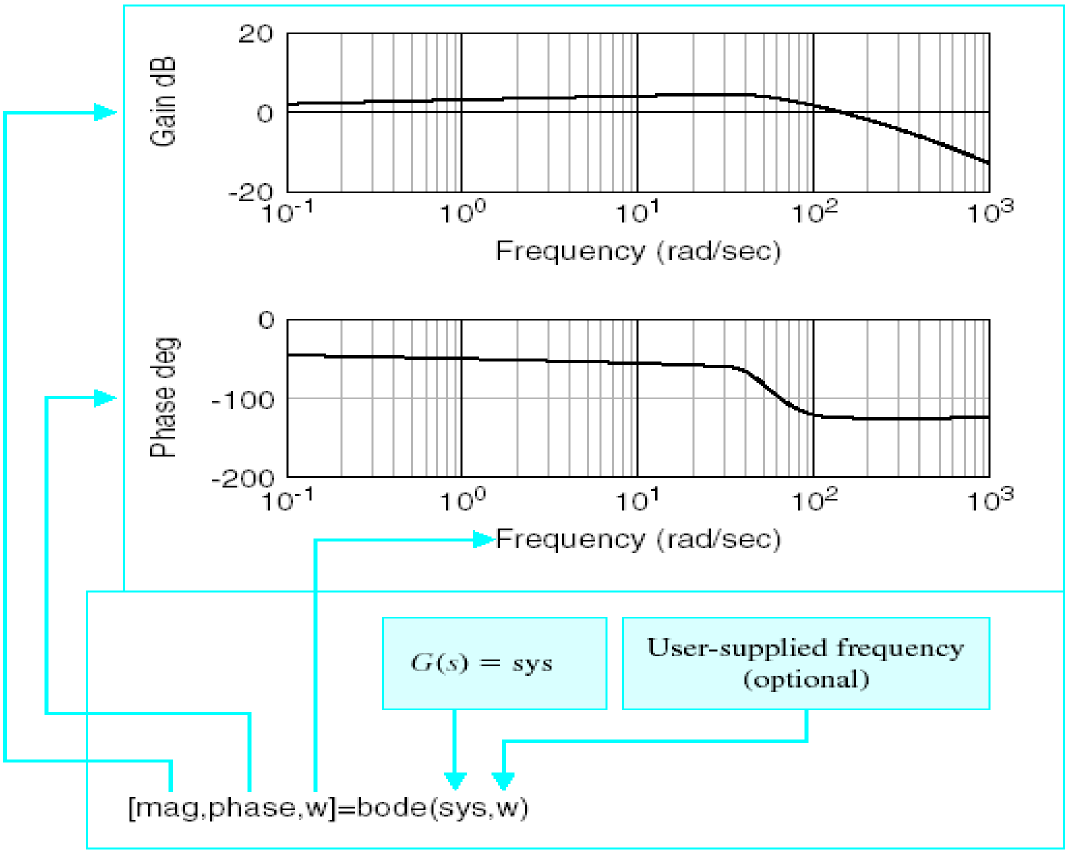


Figure 1‹ 10 ›de plot for Example 14.6, K_c = 1.

Usando o MATLAB



Exemplo 3

- Para obter o diagrama de Bode de uma função de transferência, podemos usar a função bode do MATLAB.

Por exemplo: $$G(s)= \frac{50}{s^3 + 9 s^2 + 30 s + 40}$$

```
>> num = 50;
>> den = [1 9 30 40];
>> sys = tf(num,den);
>> bode(sys)
```

ou com a única ordem:

```
>>bode(50,[1 9 30 40])
```

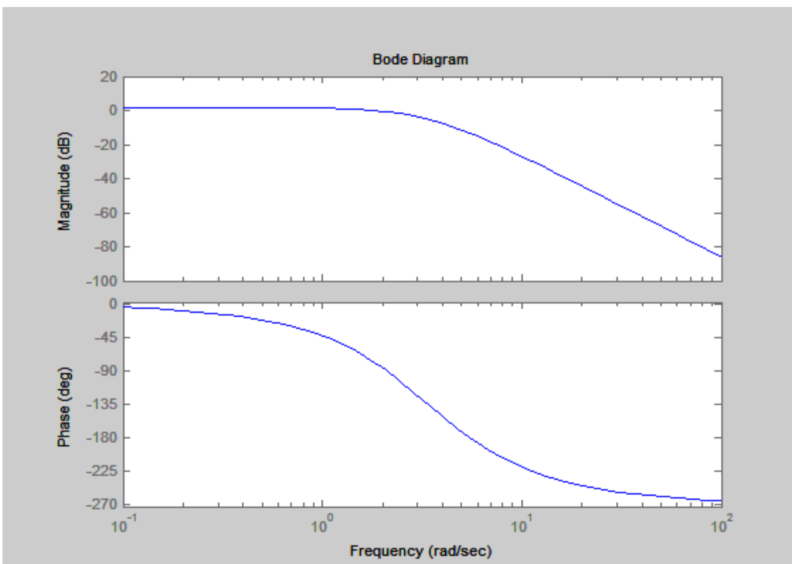


Figura 12

- Também se podem achar diretamente as margens de fase e de ganho utilizando a função margin. Esta função Matlab devolve os valores das márgens de fase (MF) e de ganho (MG nas frequências critica da fase (ω_{FC}) e de ganho (ω_{GC}), estas últimas entre parênteses, e sua representação num diagrama de Bode.

```
>> margin(sys)
```

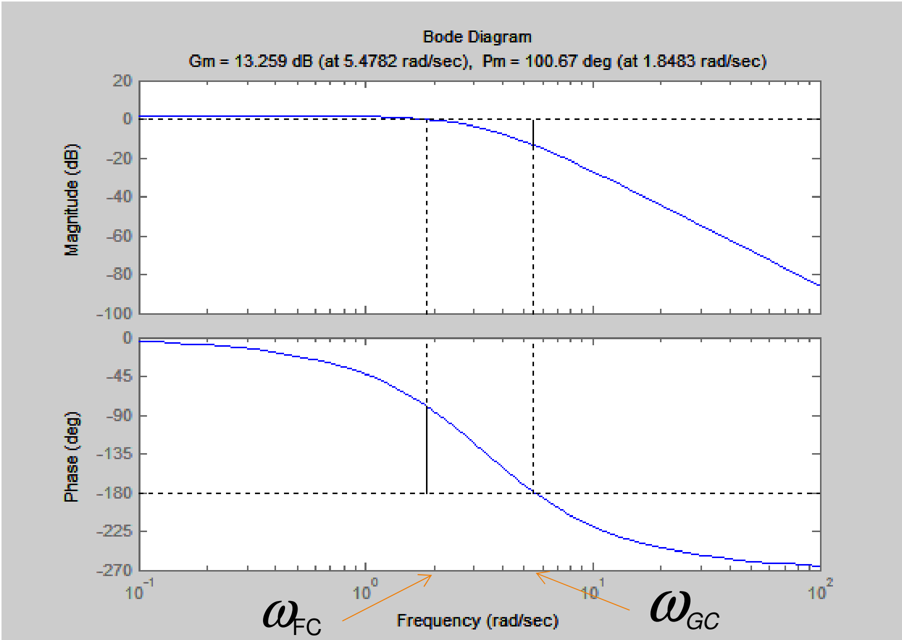
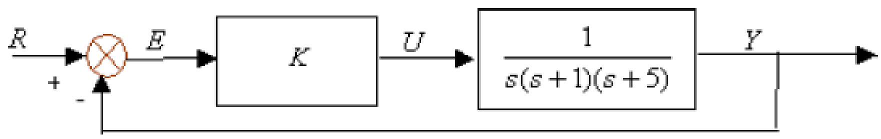


Figura 13

Exemplo 4

Obtenha os márgens de fase e ganho do sistema para os casos em que $K = 10$ e $K = 100$.




```
>> num = 10;
>> den = conv([1 0],conv([1 1],[1 5]))
>> sys = tf(num,den);
>> bode(sys)
>> margin(sys)
```

Estável

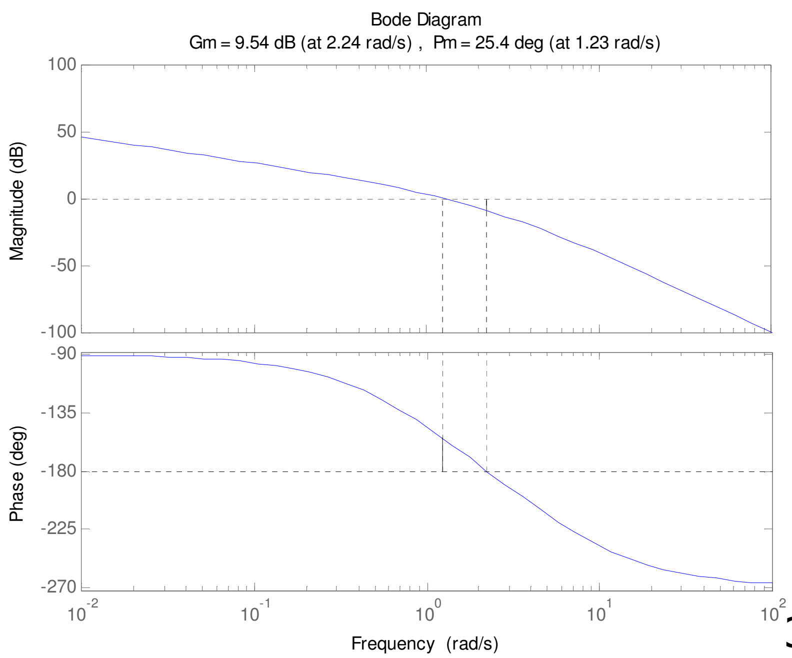
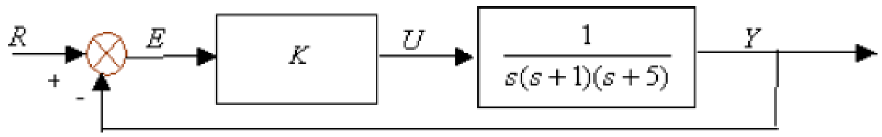
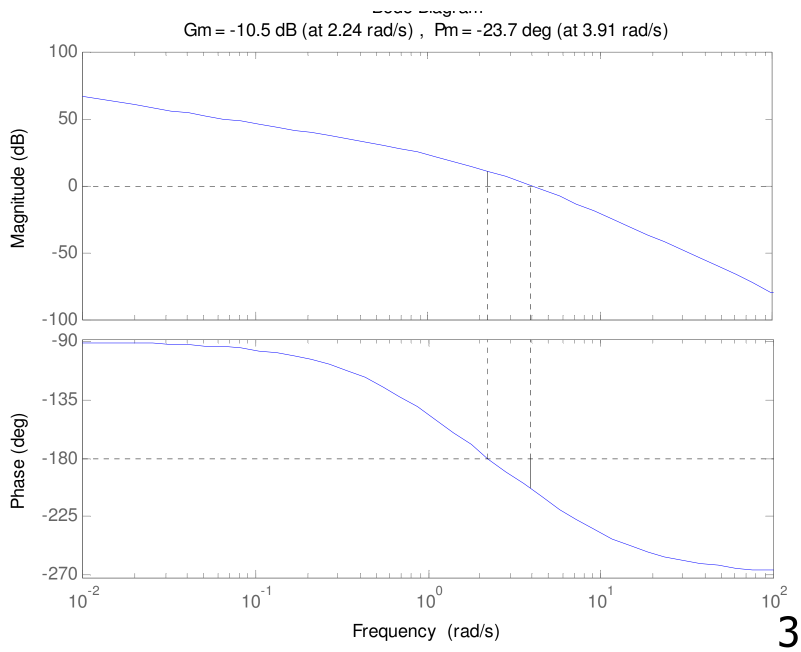


Figura 14

Exemplo 4 (cont)

Obtenha os márgens de fase e ganho do sistema para os casos em que $K = 10$ e $K = 100$.



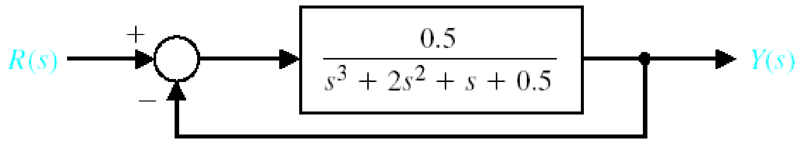


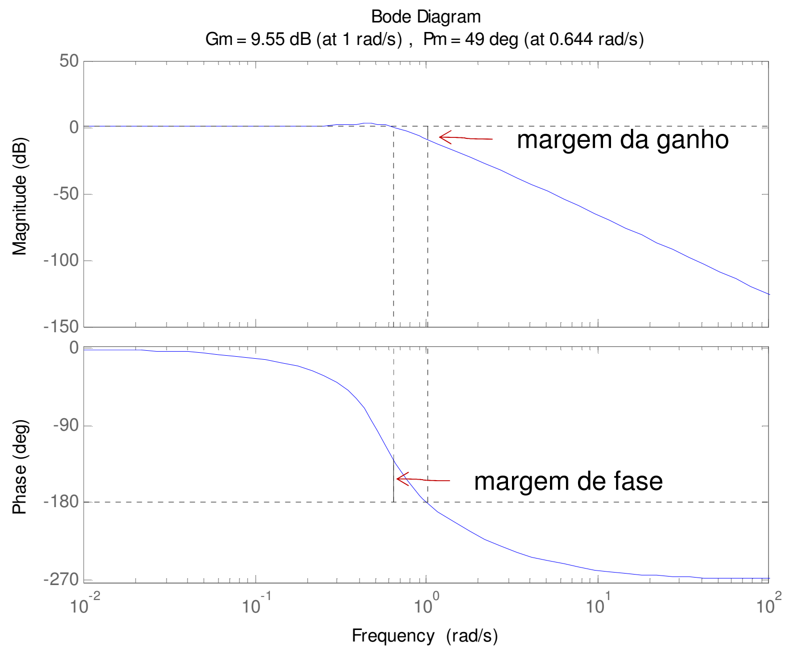

```
>> num = 100;
>> den = conv([1 0],conv([1 1],[1 5]))
>> sys = tf(num,den);
>> bode(sys)
>> margin(sys)
```

Instável

Figura 14

Exemplo 5

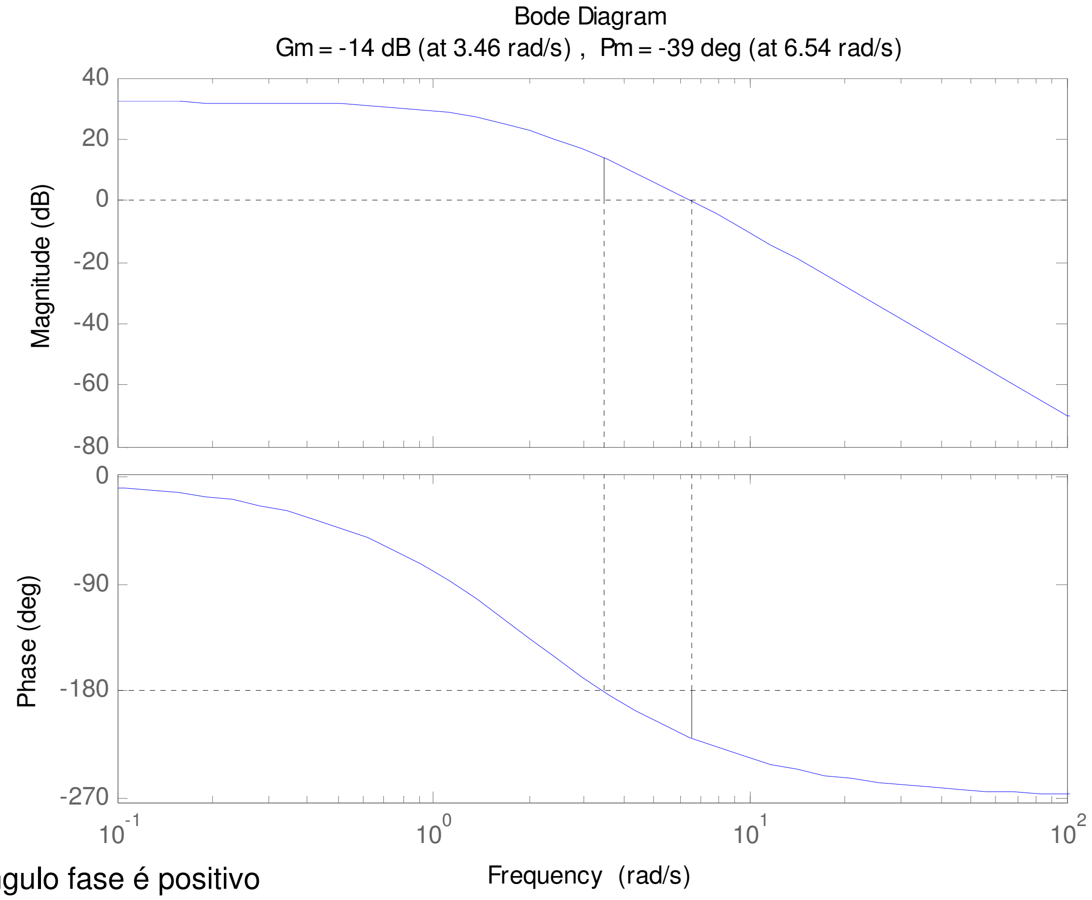





```
num = 0.5;
den = [1 2 1 0.5];
sys = tf(num,den);
margin(sys)
```

Margem de ganho abaixo de 0 dB e fase por encima dos -180º, o sistema é estável

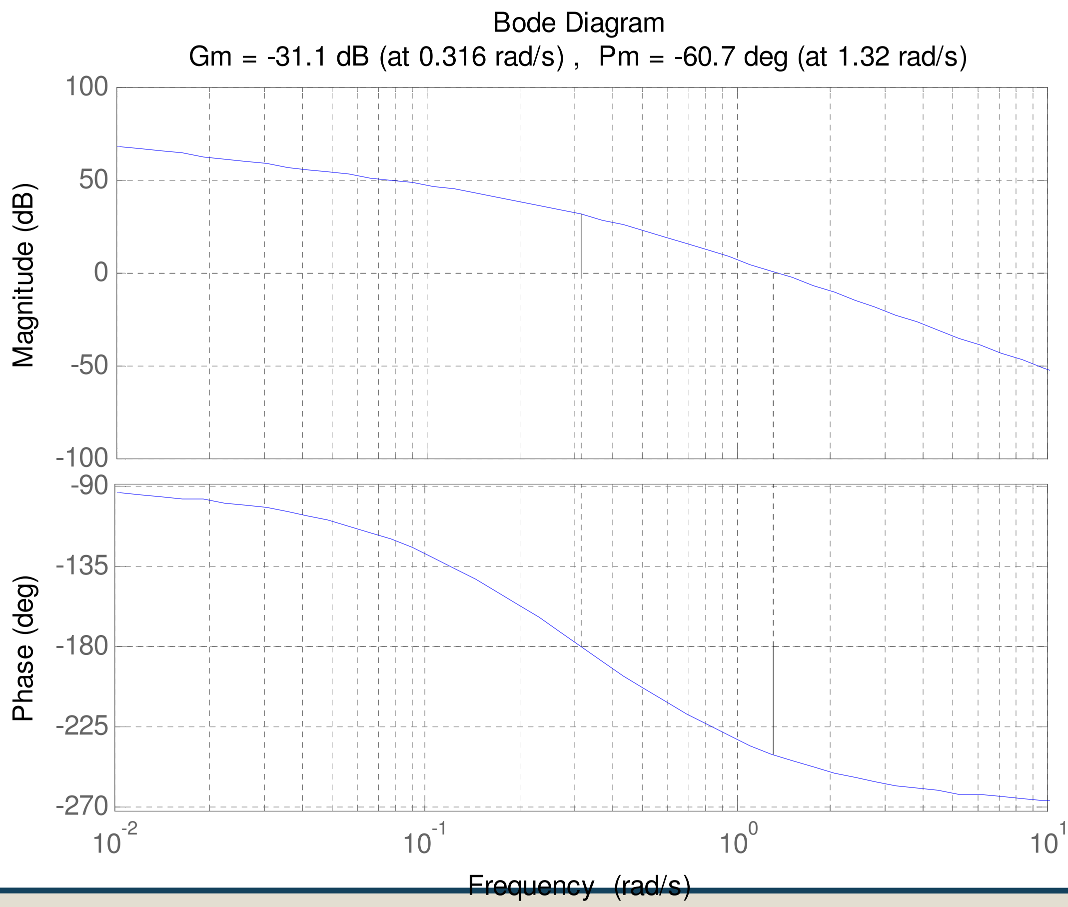
Estável



Quando o ângulo fase é positivo expressa un adianto entretanto que quando é negativo corresponde a um atraso.

Frequency (rad/s)

$$G(jw) = \frac{2,5}{jw(1+0,2\,jw)(1+0,5\,jw)}$$



Instável