

LISTA 1

1. Dados  $a, b$  em um anel  $A$ , mostre que as identidades abaixo são válidas (indique todas as propriedades utilizadas em cada passo):

$$(i) (-1) \cdot a = -a \quad (ii) (-a) \cdot b = -(a \cdot b) \quad (iii) (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

2. Seja  $P = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  o conjunto dos números inteiros pares (incluindo os negativos). Dados  $a, b \in P$ , digamos  $a = 2m$  e  $b = 2n$ , definimos:

$$\begin{cases} a \oplus b := a + b & (\text{a soma usual}) \\ a \odot b := 2mn \end{cases}$$

Pergunta:  $(P, \oplus, \odot)$  é um anel? É um domínio? É um corpo?

3. Seja  $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ . Prove que  $F$  é um subcorpo dos números reais.

4. Construa um corpo com 4 elementos (monte uma tabela com as operações de soma e multiplicação). Um pouco mais difícil (ganha uma estrelinha se conseguir): mostre que não existe um corpo com 6 elementos.

5. Qualquer que seja o anel  $A$ , prove que  $A \times A$  não é um domínio.

6. Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , definimos  $a \sim b \iff a = \pm b$ . Mostre que esta é uma relação de equivalência.

7. Considere a seguinte relação no plano:

$$p, q \in \mathbb{R}^2: \quad p \sim q \iff |p| = |q|.$$

Mostre que esta é uma relação de equivalência e descreva as classes de equivalência.

8. Sejam  $a, b$  elementos de um anel  $A$ . Dizemos que  $a$  divide  $b$  e escrevemos  $a \mid b$ , se existe  $c \in A$  tal que  $b = a \cdot c$  (ou seja,  $b$  é um múltiplo de  $a$ ).

Tome  $A = \mathbb{Z}$ . A relação  $a \sim b \iff a \mid b$  é de equivalência?

9. Dado  $a \in \mathbb{R}$ , seja considere a curva

$$C_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a + \exp(x)\}.$$

Note que  $C_0$  é o gráfico da função exponencial e que  $C_a$  é simplesmente uma translação desta curva. Dados  $p, q$  dois pontos em  $\mathbb{R}^2$ , defina

$$p \sim q \iff \text{existe } a \in \mathbb{R} \text{ tal que } p, q \in C_a.$$

Prove que esta é uma relação de equivalência; em seguida, descreva as classes de equivalência (faça um desenho).