Lista 2

1. Seja A um anel e f, g polinômios em $A[X]$. Mostre:

(a) Se f e g são mônicos, então $f \cdot g$ é mônico.

(b) Se o coeficiente líder de f é invertível, então $\text{grau}(f \cdot g) = \text{grau}(f) + \text{grau}(g)$.

2. Seja A um anel e $f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ um polinômio com coeficientes em A. Dizemos que $u \in A$ é uma *raiz* de f se $f(u) = 0$, ou seja,

$$a_n u^n + \cdots + a_1 u + a_0 = 0.$$

Encontre as raízes de $X^2 - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ e as raízes de $X^2 - \overline{1} \in \mathbb{Z}_8[X]$.

3. Considere a seguinte relação sobre os números naturais:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : \qquad a \sim b \iff a + b \text{ não é um número primo.}$$

Esta relação é de equivalência?

4. A relação

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \qquad x \sim y \iff xy \geq 0$$

é de equivalência?

5. Nos itens abaixo, determine se os conjuntos, com as operações indicadas, são anéis. Caso não sejam, determine quais condições não foram satisfeitas.

(a) $A = \mathbb{Z}$, $a \oplus b := a - b$, $a \odot b := a \cdot b$.

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $a \oplus b := a \cdot b$, $a \odot b := \exp(\log(a)\log(b))$.

6. Seja X o conjunto dos números racionais com denominadores ímpares, ou seja,

$$X = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \text{mdc}(a, b) = 1, b \text{ é ímpar} \right\}.$$

Prove que X é um subanel do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Em seguida, determine o conjunto X^* dos elementos invertíveis de X.

7. Mostre que a interseção de dois subanéis de um anel A é ainda um subanel de A.

8. Encontre um exemplo em que a união de dois subanéis não é um subanel.

9. Prove que

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \qquad (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff y_1 = y_2.$$

é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$. Descreva as classes de equivalência.