Lista 3

1. Seja A um anel e tome $a \in A$ um elemento fixado. Mostre que a função $\varphi\colon A[X] \to A$ dada por $\varphi(p(X)) = p(a)$ é um homomorfismo e determine seu núcleo e imagem.

2. Defina $\varphi\colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ por $\varphi(0) = 0$ e que leva um polinômio não-nulo em seu coeficiente líder, isto é, se $p(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ com $a_n \neq 0$, então $\varphi(p(X)) = a_n$. Esta função é um homomorfismo?

3. Nenhuma das funções abaixo é um homomorfismo de anéis. Em cada caso, determine quais as exigências da definição que não foram cumpridas.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ (b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(n) = -n$

(c) $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $h(a + bi) = a + b$ (d) $p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $p(q) = 0$.

4. Provamos em aula que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Não há nada de especial com o número 2: com o mesmo método, prove que para qualquer número primo p, $\sqrt{p}$ não é um número racional. O que você pode dizer sobre $\sqrt[3]{p}, \sqrt[4]{p}, \ldots$?

5. Seja $f\colon A \to B$ um homomorfismo de anéis. Mostre que se $a \in A$ é invertível, então $f(a)$ é invertível em B e $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.

6. Mostre que a composição de homomorfismos de anéis é ainda um homomorfismo.

7. Seja $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Mostre que a função $\varphi\colon \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}$, não é um homomorfismo de anéis.

8. Prove que $\sigma\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]$ dada por $\sigma(a + bi) = a - bi$ é um homomorfismo de anéis e determine seu núcleo.

9. Seja A um anel. Você é capaz de encontrar um homomorfismo $\varphi\colon A \to A \times A$?

10. Mostre não existem subanéis próprios em $\mathbb{Z}$, ou seja: se $A \subseteq \mathbb{Z}$ é um subanel, então $A = \mathbb{Z}$.

11. Seja $X = \{x, y\}$ um conjunto formado por dois elementos distintos. Determine quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

(a) $x \in X$ (b) $\{x\} \in X$ (c) $\{x\} \subseteq X$ (d) $X \in X$ (e) $X \in \{X\}$

(f) $\{x\} \in \{X\}$ (g) $\{\{x\}, y\} \subseteq X$ (h) $\{x\} \cup \{y\} = X$ (i) $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$

(j) $\emptyset \subseteq X$ (k) $\emptyset \in X$ (ℓ) $\{\emptyset\} \subseteq X$