LISTA 4

1. Um conjunto $S \subset \mathbb{Z}$ é dito *limitado superiormente* se existe algum inteiro $c \in \mathbb{Z}$ tal que $s \leq c$, para todo $s \in S$. Prove que se $S \subset \mathbb{Z}$ é não vazio e limitado superiormente, então S possui elemento *máximo*, isto é: existe $m \in S$ tal que $s \leq m$, para todo $s \in S$ (sugestão: considere o conjunto $T = \{-s \mid s \in S\}$ e mostre que $m = -\min(T)$).

2. Seja A um anel ordenado. Dado $a \in A$, defina

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Dados $a, b \in A$, prove:

(a) $|a| = \max\{a, -a\}$

(b) $-|a| \leq a \leq |a|$

(c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(d) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(e) $|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|$

3. Seja n um inteiro positivo. Usando o princípio da indução, mostre que:

(a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

(c) Se n é *ímpar*, então $n^3 - n$ é um múltiplo de 24.

(d) Se $n \geq 3$, então $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$.

(e) $\dfrac{n}{6} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n^3}{3}$ é um número inteiro.

(f) $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1}$.

4. Prove que:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

5. A fórmula de *De Moivre*: dado $\theta \in \mathbb{R}$, mostre que para todo inteiro n vale a identidade

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta).$$

Sugestão: Prove inicialmente para $n \geq 0$ usando o princípio da indução e com auxílio das relações

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \qquad \text{e} \\ \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a). \end{aligned}$$

6. Mostre que as seguintes identidades binomiais são válidas:

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.

(b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.

(c) $1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

(d) $1 \cdot 2\binom{n}{2} + 2 \cdot 3\binom{n}{3} + \cdots + (n-1) \cdot n\binom{n}{n} = n(n-1)2^{n-2}$.

Ajuda: (a) $(1+1)^n$; (b) $(1-1)^n$; (c) derive $f(X) = (1+X)^n$ e calcule $f'(1)$; (d) calcule $f''(1)$.

7. Seja A um conjunto com n elementos e seja k um inteiro com $0 \leq k \leq n$. Utilizando o princípio da indução, mostre que A possui exatamente $\binom{n}{k}$ subconjuntos distintos com k elementos.

8. Dado um conjunto A, seja $\mathcal{P}(A)$ o *conjunto das partes de* A, isto é, o conjunto formado por todos os subconjuntos de A. Por exemplo, se $A = \{a, b\}$, então

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Mostre que se A possui n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ possui 2^n elementos. Faça isso de duas maneiras: (a) princípio da indução; (b) exercício 7 e item (a) do exercício 6.

9. (Soma dos termos de uma progressão aritmética) Sejam a, r números reais. Defina $a_1 = a$ e, para $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + r$. Para cada $n \geq 1$, mostre que:

(a) $a_n = a + (n-1)r$.

(b) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(2a+(n-1)r)}{2}$.

10. (Soma dos termos de uma progressão geométrica) Sejam a, q números reais, com $q \neq 1$. Defina $a_1 = a$, $a_2 = aq$, ..., $a_n = aq^{n-1}$. Mostre que, para cada $n \geq 1$,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{q^n a - a}{q - 1}.$$