Lista 5

1. Ache o menor múltiplo positivo de 5 que deixa resto 2 quando dividido por 3 e 4.

2. Mostre que:

(a) Se n é ímpar, então $n^2 - 1$ é divisível por 8.

(b) Se n não é divisível nem por 2 nem por 3, etnão $n^2 - 1$ é divisível por 24.

(c) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $4 \nmid n^2 + 2$.

3. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não ambos nulos e seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Mostre que $\text{mdc}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

4. **V** ou **F**? Justifique sua resposta, apresentando uma prova ou um contra-exemplo, conforme o caso.

(a) $2^{102} \equiv 6 \pmod{17}$;

(b) Se $d = \text{mdc}(a, b)$, então $dc = \text{mdc}(ac, bc)$;

(c) Se $ac \equiv bc \pmod{n}$, então $a \equiv b \pmod{n}$;

5. Sejam a, b, c, n inteiros com $n \geq 1$. Suponha que $\text{mdc}(c, n) = 1$. Mostre que

$$ac \equiv bc \pmod{n} \implies a \equiv b \pmod{n}.$$

6. Generalizando: sejam a, b, c, n inteiros, com $n \geq 1$, e seja $d = \text{mdc}(c, n)$. Mostre que

$$ac \equiv bc \pmod{n} \implies a \equiv b \pmod{\frac{n}{d}}.$$

7. Prove que se $3 \nmid n$, então n^2 deixa resto 1 na divisão por 3. Usando isto, mostre que se a e b são inteiros tais que $3 \mid a^2 + b^2$, então a e b são divisíveis por 3.

8. (a) Calcule $\text{mdc}(219, 53)$;

(b) Determine todas as soluções da equação diofantina $219x + 53y = 1$;

9. **V** ou **F**? Justifique sua resposta, apresentando uma prova ou um contra-exemplo, conforme o caso.

(a) A equação diofantina $18x - 24y = 15$ não possui solução.

(b) Se a, b, c são inteiros e $a^2 \mid bc$, então $a \mid b$ ou $a \mid c$.

(c) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, tem-se $\text{mdc}(n!, n+1) = 1$.

10. Sejam a, b, c inteiros, com a e b não-nulos e tome $d = \text{mdc}(a, b)$. Mostre que:

$$a \mid c \quad \text{e} \quad b \mid c \Longrightarrow ab \mid cd.$$

11. Mostre que para cada inteiro $n > 0$, tem-se:

(a) $17 \mid 19^{8n} - 1$ (b) $13 \mid 9^{2n} - 4^{2n}$ (c) $13 \mid 7^{2n+1} + 6^{2n+1}$

12. Considere a sequência crescente de inteiros dada por:

$$a_0 := 2, a_1 := a_0! + 1, \ldots, a_{n+1} := a_n! + 1, \ldots.$$

Mostre que:

(a) Se $i < j$, então $a_i \mid a_j!$;

(b) Se $i \neq j$, então $\text{mdc}(a_i, a_j)$=1;

(c) Conclua do item (b) que existem infinitos números primos.