

LISTA 6

1. Sejam  $I, J$  ideais de um anel  $A$ . Mostre que  $I \cap J$  é um ideal de  $A$ .
2. Apresente um exemplo de dois ideais cuja união não é um ideal.
3. Seja  $A$  um anel. Mostre que se

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de ideais, então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  é um ideal de  $A$ .

4. Vimos em sala que  $\mathbb{Z}$  é um anel principal. Assim, dados  $m, n \in \mathbb{Z}$ , existe  $d \in \mathbb{Z}$  tal que  $(d) = (m, n)$ . Mostre que  $d = \text{mdc}(m, n)$ .
5. Seja  $k$  um corpo. Mostre que o anel de polinômios  $k[X]$  é um domínio principal. Sugestão: use a divisão euclidiana de polinômios, imitando a prova feita em sala para  $\mathbb{Z}$ , substituindo  $|\cdot|$  (módulo) por  $\text{grau}(\cdot)$ .

Seja  $I$  um ideal de um anel  $A$ . Duas definições:

- $I$  é um ideal *primo* se  $I \neq A$  e se para quaisquer  $a, b \in A$  tais que  $a \cdot b \in I$ , tem-se que  $a \in I$  ou  $b \in I$ .
- $I$  é um ideal *maximal* se  $I \neq A$  e se  $J$  é um ideal de  $A$  tal que  $I \subseteq J \subseteq A$ , então  $I = J$  ou  $J = A$ .

6. Mostre que todo ideal maximal é primo.
7. Seja  $I$  um ideal de um anel  $A$ . Dados  $a, b \in A$ , defina

$$a \sim b \iff a - b \in I$$

Mostre que esta é uma relação de equivalência.