Uma construção dos números inteiros

Abaixo você encontra um roteiro para construir o domínio $\mathbb{Z}$ dos números inteiros a partir do conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dos números naturais. Trata-se de uma analogia com a construção de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ que fizemos em sala; entretanto, ao invés de construírmos inversos multiplicativos, construímos inversos aditivos.

Aprendi essa construção com o Prof. Giuseppe Borrelli.

Definimos em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a relação

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad (a, b) \sim (c, d) \underset{\text{def}}{\iff} a + d = b + c.$$

Convido você a verificar que:

1. Esta é uma relação de equivalência.

2. Dado um par (a, b) em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, então $(a, b) \sim (0, 0)$ se e somente se $a = b$; caso contrário, existe um único natural n tal que o par é equivalente a $(n, 0)$ (se $a > b$) ou é equivalente a $(0, n)$ (se $a < b$).

3. Seja $D = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ o conjunto quociente e denote por $[a, b]$ a classe de equivalência de (a, b). Definimos em D duas operações:
$$[a, b] \oplus [c, d] := [a + c, b + d] \quad \text{e} \quad [a, b] \odot [c, d] := [ac + bd, ad + bc]$$
Então estas operações estão bem definidas, ou seja, se trocamos (a, b) por um par (a', b') equivalente, a classe de equivalência do resultado não se altera.

4. Vale que $[0, 0]$ é o elemento neutro de $\oplus$ e que $[1, 0]$ é o de $\odot$; vale $\ominus[a, b] = [b, a]$; mais ainda, D é um domínio.

5. A relação
$$[a, b] \leq [c, d] \underset{\text{def}}{\iff} a + d \leq b + c$$
faz de D um *domínio ordenado*, isto é: esta é uma relação de ordem total que satisfaz, para $x, y, z \in D$:
$$x \leq y \implies x \oplus z \leq y \oplus z \qquad \text{e} \qquad x < y \text{ e } z > 0 \implies x \odot z < y \odot z.$$

6. O domínio D é *bem ordenado*: todo conjunto não-vazio limitado inferiormente possui elemento mínimo (vem do fato de que esta propriedade vale em $\mathbb{N}$).

7. A função $\varphi \colon \mathbb{N} \to D$ dada por $\varphi(n) = [n, 0]$ é injetora e satisfaz
$$\varphi(m + n) = \varphi(m) \oplus \varphi(n) \quad \text{e} \quad m \leq n \iff \varphi(m) \leq \varphi(n)$$

8. Pode-se mostrar que, com estas propriedades, o domínio $(D, \oplus, \odot, \leq)$ é *isomorfo* ao domínio $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.