Lista 1

1. Dados a, b em um anel A, mostre que as identidades abaixo são válidas (indique todas as propriedades utilizadas em cada passo):

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (ii) $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$ (iii) $(a^{-1})^2 = (a^2)^{-1}$.

2. Nos itens abaixo, determine se os conjuntos, com as operações indicadas, são anéis. Caso não sejam, determine quais condições não foram satisfeitas.

(a) $A = \mathbb{Z}$, $a \oplus b := a \cdot b$, $a \odot b := a + b$.

(b) $A = \mathbb{Z}$, $a \oplus b := a - b$, $a \odot b := a \cdot b$.

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $a \oplus b := a \cdot b$, $a \odot b := \exp(\log(a)\cdot\log(b))$.

3. Seja $P = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ o conjunto dos números inteiros pares (incluindo os negativos). Dados $a, b \in P$, digamos $a = 2m$ e $b = 2n$, definimos:

$$\begin{cases} a \oplus b := a + b & \text{(a soma usual)} \\ a \odot b := 2mn \end{cases}$$

Pergunta: $(P, \oplus, \odot)$ é um anel? É um domínio? É um corpo?

4. Seja $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Mostre que A é um domínio e determine A^*.

5. Seja $F = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Prove que F é um subcorpo dos números complexos.

6. Construa um corpo com 4 elementos (monte uma tabela com as operações de soma e multiplicação).

7. Qualquer que seja o anel A, prove que $A \times A$ não é um domínio.

8. Seja X o conjunto dos números racionais com denominadores ímpares, ou seja,

$$X = \Big\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ é ímpar}\Big\}.$$

Prove que X é um subanel do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Em seguida, determine o conjunto X^* dos elementos invertíveis de X.

9. Mostre que a interseção de dois subanéis de um anel A é ainda um subanel de A.

10. Mostre que se A é um subanel de $\mathbb{Z}$, então $A = \mathbb{Z}$.