LISTA 2

Abaixo, A é um anel.

1. Em cada item abaixo, realize a divisão dos polinômios indicados, encontrando quociente e o resto.

(a) Em $\mathbb{Z}[x]$: $2x^3 + 2x^2 - 4$ por $x^2 - 1$.

(b) Em $\mathbb{Z}[i][x]$: $2x^3 + 2x^2 - 4$ por $ix^2 + 2 + i$.

(c) Em $\mathbb{Z}_8[x]$: $\overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 - \overline{4}$ por $\overline{5}x^2 - \overline{3}x + \overline{1}$.

2. Encontre as raízes de $x^3 + x^2 + x + \overline{1}$ em $\mathbb{Z}_6$.

3. Seja M_2 o anel das matrizes 2×2 com entradas reais. Apresente um exemplo de um polinômio não-nulo em $M_2[x]$ com infinitas raízes.

4. Mostre que se D é um domínio, então $D[x]$ também é.

5. Determine $\mathbb{Z}_{11}^*$ e $\mathbb{Z}_{12}^*$.

6. Determine os divisores de zero de: $\mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{Z}_{10}$.

7. Calcule o inverso de $\overline{12}$ em $\mathbb{Z}_{13}$.

8. Sejam $a, u \in A$ com u invertível e $a \neq 0$. Mostre que $a \cdot u \neq 0$.

9. Se $u, v \in A$ são invertíveis, então $u \cdot v$ é invertível.

10. Para cada um dos conjuntos X abaixo, determine quais as relações apresentadas são de equivalência, justificando sua resposta. Em caso afirmativo, descreva a partição induzida em X.

(a) $X = \mathbb{R}$. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \sim y \iff xy \geq 0$.

(b) $X = \mathbb{R}^2$. $\forall u, v \in \mathbb{R}^2 : u \sim v \iff$ existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $u = \lambda v$.

(c) $X = \mathbb{R}^2$. $\forall u, v \in \mathbb{R}^2 : u \sim v \iff u - v \in \mathbb{Z}^2$.

(d) Em $\mathbb{R}^2$: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff y_1 = y_2$.

(e) $X = S^2$: $p \sim q \iff p = -q$
(aqui, $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é a esfera unitária).

(f) $X = \mathbb{N}$. $a \sim b \iff a + b$ não é um número primo.