Lista 3

1. Abaixo, quais relações são de fato uma relação de ordem? Justifique.

(a) Em $\mathbb{Z}$: $a \preceq b \iff$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot k$ (ou seja, "a divide b").

(b) Em $\mathbb{R}$: $x \preceq y \iff x^2 \leq y^2$.

(c) Em $\mathbb{R}$: $x \preceq y \iff x^3 \leq y^3$.

(d) Em $\mathbb{Z}[i]$: $u \preceq v \iff |u| \leq |v|$ (aqui $\mathbb{Z}[i]$ é o anel dos inteiros de Gauss).

2. Sejam $(D, \leq)$ um domínio ordenado e F seu corpo de frações. Definimos em F

$$\frac{a}{b} \preceq \frac{c}{d} \iff ad \leq bc.$$

Mostre que $(F, \preceq)$ é um corpo ordenado.

3. Dado $n > 0$, prove que não é possível de $\mathbb{Z}_n$ um anel ordenado. Em outras palavras, não é possível definir em $\mathbb{Z}_n$ uma ordem total compatível com as operações de soma e produto, como definimos em sala (dica: $\overline{1}, \overline{1} + \overline{1}, \ldots$).

4. Em geral: um anel com um número finito de elementos nunca é um anel ordenado.

5. Seja A um anel ordenado. Dado $a \in A$, defina

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Dados $a, b \in A$, prove:

(a) $|a| = \max\{a, -a\}$

(b) $-|a| \leq a \leq |a|$

(c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(d) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(e) $|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|$

6. (Um exemplo de um anel não arquimediano) Dados $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ declaramos

$$f \succeq g \iff \text{o coeficiente líder de } f - g \text{ é não-negativo.}$$

(a) Esta é de fato uma relação de ordem, que faz de $\mathbb{Z}[x]$ um domínio ordenado.

(b) Dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, vale que $n < x$.
A conclusão surpreendente é que o conjunto dos números naturais é *limitado* em $\mathbb{Z}[x]$ (note que isto não acontece para $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$). Um anel com esta propriedade é chamado *não arquimediano.*

7. (Experimental, tente por sua própria conta e risco) Quantas relações de ordem distintas é possível definir no conjunto $\{1, 2, 3\}$? E quantas relações de equivalência?