# Lista 4

**1.** Seja $X \subset \mathbb{Z}$ um conjunto não-vazio. Mostre que se $X$ é limitado superiormente, então $X$ possui um maior elemento, isto é, existe $x_0 \in X$ tal que $x \leq x_0$ para todo $x \in X$.

**2.** Seja $n$ um inteiro positivo. Usando o princípio da indução, mostre que:

(a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

(b) Se $n$ é *ímpar*, então $n^3 - n$ é um múltiplo de $24$.

(c) Se $n \geq 3$, então $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$.

(d) $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$.

**3.** Prove que:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

**4.** A fórmula de *De Moivre*: dado $\theta \in \mathbb{R}$, mostre que para todo inteiro $n$ vale a identidade

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta).$$

Sugestão: Prove inicialmente para $n \geq 0$ usando o princípio da indução e com auxílio das relações

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \qquad \text{e} \\ \operatorname{sen}(a + b) &= \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a). \end{aligned}$$

**5.** Enuncie e prove a relação de Stifel (dica: não use o princípio da indução).

**6.** Mostre que as seguintes identidades binomiais são válidas:

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.

(b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.

(c) $1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

(d) $1 \cdot 2\binom{n}{2} + 2 \cdot 3\binom{n}{3} + \cdots + (n-1) \cdot n\binom{n}{n} = n(n-1)2^{n-2}$.

Ajuda: (a) $(1+1)^n$; (b) $(1-1)^n$; (c) derive $f(X) = (1+X)^n$ e calcule $f'(1)$; (d) calcule $f''(1)$.

**7.** Mostre que:

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6}.$

(b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 = \dfrac{n^4}{4} - \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{4}.$

E se ainda tiver fôlego:

(c) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n-1)^4 = \dfrac{n^5}{5} - \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}.$

(d) $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + (n-1)^5 = \dfrac{n^6}{6} - \dfrac{n^5}{2} + \dfrac{5n^4}{12} - \dfrac{n^2}{12}.$

**8.** Seja $A$ um conjunto com $n$ elementos e seja $k$ um inteiro com $0 \leq k \leq n$. Utilizando o princípio da indução, mostre que $A$ possui exatamente $\binom{n}{k}$ subconjuntos distintos com $k$ elementos.

**9.** Dado um conjunto $A$, seja $\mathcal{P}(A)$ o *conjunto das partes de* $A$, isto é, o conjunto formado por todos os subconjuntos de $A$. Por exemplo, se $A = \{a, b\}$, então

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Mostre que se $A$ possui $n$ elementos, então $\mathcal{P}(A)$ possui $2^n$ elementos. Faça isso de duas maneiras: (a) princípio da indução; (b) exercício 8 e item (a) do exercício 6.

**10.** Considere a sequência de Fibonacci:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8,\ a_7 = 13, \ldots$$

e em geral $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para $n$ positivo. Mostre que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(c^n - b^n)$$

onde $b < c$ são as raízes reais do polinômio $x^2 - x - 1$.

**11.** (Soma dos termos de uma progressão aritmética) Dados $a, r \in \mathbb{R}$, considere a *progressão aritmética* de razão $r$: $a_1 = a, a_2 = a + r, a_3 = a_2 + r, \ldots, a_n = a_{n-1} + r, \ldots$. Prove:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}\ .$$

**12.** (Soma dos termos de uma progressão geométrica) Dado $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, considere a *progressão geométrica* com razão $q$: $1, q, q^2, \ldots$. Prove:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\ .$$

**13.** (Desigualdade de Bernoulli) Sejam $x > -1$ um número real e $n \geq 1$ um inteiro. Utilizando o princípio da indução, mostre que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

**14.** Prove que $|q| < 1$, então

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

(Considere $x = 1 - 1/|q|$. Basta mostrar que $(1+x)^n \to \infty$, o que pode ser feito com auxílio da desigualdade de Bernoulli. Note que $x > 0$.)

**15.** Como consequência dos Exercícios 12 e 14, mostre que se $|q| < 1$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = \frac{1}{1-q}.$$

**16.** Seja $n$ um inteiro positivo e defina $S(n) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

(a) Prove que $S(n) < 2 - \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 2$.

(b) Utilize o item (a) para concluir $S(n) < 2$ para todo $n \geq 1$.

Observação: Euler mostrou que $\lim_{n\to\infty} S(n) = \pi^2/6$ (!)