# Lista 5

**1.** Em um anel qualquer: $a \mid b$ e $a \mid c \implies a \mid b + c$.

**2.** Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não ambos nulos e seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Então $\text{mdc}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

**3.** Sejam $a, b, c$ em um domínio, com $a$ e $b$ não nulos. Seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Então:

$$a \mid c \quad \text{e} \quad b \mid c \implies ab \mid cd.$$

**4.** Utilizando divisões sucessivas, calcule em $\mathbb{Z}$:

(a) $\text{mdc}(30, 18)$ (b) $\text{mdc}(72, 486)$ (c) $\text{mdc}(1011, 99)$

**5.** Para cada par $a, b$ do exercício anterior, encontre $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax+by = \text{mdc}(a, b)$.

**6.** Seja $D$ um domínio principal. Dados $a, b \in D$, sejam $d = \text{mdc}(a, b)$ e $m = \text{mmc}(a, b)$. Vamos mostrar que $dm$ é associado a $ab$.

(a) Sejam $x, y \in D$ tais que $ax + by = d$. Multiplicando ambos os lados por $m$, conclua que $ab \mid dm$.

(b) Mostre que $m \mid \frac{ab}{d}$ e logo $dm \mid ab$.

(c) Conclua que $dm$ e $ab$ são associados. Em particular, em $\mathbb{Z}$, tomando $a, b, d, m$ positivos, temos a igualdade $dm = ab$.

**7.** Se $I, J$ são ideais em um anel $A$, então $I \cap J$ é um ideal de $A$.

**8.** Seja $D$ um domínio principal. Dados $a, b \in D$, seja $m \in D$ tal que $(m) = (a) \cap (b)$ (veja o exercício anterior). Mostre que $m = \text{mmc}(a, b)$.

**9.** (Um exemplo onde o mdc não existe) Seja $A = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Prove que $A$ é um subdomínio dos números complexos.

(b) Defina $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$. Prove que se $u, v \in A$, então

$$N(u \cdot v) = N(u) \cdot N(v).$$

(c) Mostre que $2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$.

(d) Utilizando a função $N(\cdot)$, mostre que $2, 3, 1 + \sqrt{5}$ e $1 - \sqrt{5}$ são irredutíveis em $A$.

(e) Tente se convencer que $\text{mdc}(2 \cdot 3, 2 \cdot (1 + \sqrt{-5}))$ *não existe* (veremos mais tarde).