Lista 7

1. Sejam I, J ideais de um anel A. Mostre que $I \cap J$ é um ideal de A.

2. Apresente um exemplo de dois ideais cuja união não é um ideal.

3. Seja A um anel. Mostre que se

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de ideais, então $\cup_{n=1}^{\infty} I_n$ é um ideal de A.

4. Vimos em sala que $\mathbb{Z}$ é um anel principal. Assim, dados $m, n \in \mathbb{Z}$, existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $(d) = (m, n)$. Mostre que $d = \text{mdc}(m, n)$.

5. Seja k um corpo. Mostre que o anel de polinômios $k[X]$ é um domínio principal. Sugestão: use a divisão euclidiana de polinômios, imitando a prova feita em sala para $\mathbb{Z}$, substituindo $|\cdot|$ (módulo) por grau$(\cdot)$.

Seja I um ideal de um anel A. Duas definições:

- I é um ideal *primo* se $I \neq A$ e se para quaisquer $a, b \in A$ tais que $a \cdot b \in I$, tem-se que $a \in I$ ou $b \in I$.
- I é um ideal *maximal* se $I \neq A$ e se J é um ideal de A tal que $I \subseteq J \subseteq A$, então $I = J$ ou $J = A$.

6. Mostre que todo ideal maximal é primo.

7. Seja I um ideal de um anel A. Dados $a, b \in A$, defina

$$a \sim b \iff a - b \in I$$

Mostre que esta é uma relação de equivalência.