Lista 8 – extras

1. Provamos em aula que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Não há nada de especial com o número 2: com o mesmo método, prove que para qualquer número primo p, $\sqrt{p}$ não é um número racional. O que você pode dizer sobre $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[4]{p}, \ldots$?

2. Considere a sequência de Fibonacci:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13, \ldots$$

onde cada termo é a soma dos dois anteriores, ou seja, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Mostre:

(a) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(b^n - a^n)$, onde $a < b$ são as raízes do polinômio $x^2 - x - 1$.

(b) $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$.

(c) $\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$.

3. (Divisibilidade por 7) Dado um inteiro positivo n, escreva-o como $n = 10a + b$, com $0 \leq b \leq 9$ (ou seja, b é o algarismo das unidades de n). Por exemplo, se $n = 439$, então $a = 43$ e $b = 9$. Prove que:

$$n \text{ é divisível por } 7 \iff a - 2b \text{ é divisível por } 7.$$

Usando este critério repetidamente, determine se 654321 é divisível por 7.

Observe que este critério não nos devolve o resto na divisão, apenas nos responde se o número é um múltiplo de 7 ou não.

4. (Divisibilidade por 19) Como antes, escreva $n = 10a + b$, com $0 \leq b \leq 9$. Prove que:

$$n \text{ é divisível por } 19 \iff a + 2b \text{ é divisível por } 19.$$

Usando este critério repetidamente, determine se 654321 é divisível por 19.

5. Você consegue generalizar os dois exercícios anteriores e inventar um critério de divisibilidade por 13?
Sugestão: $7 \mid 2 \cdot 10 + 1$, $19 \mid 2 \cdot 10 - 1$ e $13 \mid 4 \cdot 10 - 1$.

6. (Um exemplo de um domínio que não é de fatoração única) Considere o domínio $\mathbb{Z}[x]$, dados pelos com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Tome B como o subconjunto dos polinômios sem a parte linear, ou seja,

$$B = \{a_0 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre:

(a) B é um subdomínio de $\mathbb{Z}[x]$.

(b) x^2 e x^3 são irredutíveis em B (observe que $x \notin B$!).

(c) $x^2x^2x^2$ e x^3x^3 são duas fatorações distintas de x^6 como produto de irredutíveis em B. Portanto B não é fatorial.

7. Demonstre a *identidade de Euler*:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

onde $k, m, n \leq 1$, $k \leq m$ e $k \leq n$. (Sugestão: desenvolva os dois lados da identidade polinomial $(1+X)^{m+n} = (1+X)^n(1+X)^m$ utilizando o binômio de Newton e compare os coeficientes dos termos de mesmo grau.)

Combinatória: como escolher k elementos em dois conjuntos disjuntos, um deles com m e o outro com n elementos?

8. Seja $k \leq 0 < n$. Prove que

$$f(n,k) := \sum_{i=k}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{i}{k} = 0.$$

Sugestão: note que $f(n,0) = 0$ para $n > 0$; tendo isso, use indução em k e a relação de Stifel para mostrar que $f(n,k) = -f(n-1,k-1)$.

9. Seja $F_n = 2^{2^n} + 1$ o n-ésimo número de Fermat. Prove que as seguintes identidades são válidas:

(a) $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$

(b) $F_n = F_{n-1} + 2^{2^{n-1}} F_0 \cdots F_{n-2}$

(c) $F_n = F_{n-1}^2 - 2(F_{n-2} - 1)^2$

(d) $F_n = F_0 \cdots F_{n-1} + 2$