Lista 10

1. (a) Mostre que $(1\,4\,7\,5\,8) = (1\,4)(4\,7)(7\,5)(5\,8)$.

(b) Seja $\sigma = (a_1\ a_2 \cdots\ a_r)$ um r-ciclo. Mostre que $\sigma = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\cdots(a_{r-1}\ a_r)$.

(c) Sabendo que toda transposição tem sinal -1, conclua que sinal(r-ciclo) $= (-1)^{r-1}$.

2. Calcule o sinal de cada uma das permutações abaixo.

(a) $\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9}{2\,3\,4\,5\,1\,6\,7\,9\,8}$ (b) $\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{6\,5\,4\,3\,1\,2\,7}$ (c) $(1\,2)(1\,2\,3)(1\,2)$ (d) $(1\,7\,5)^{-1}(5\,8\,1)(1\,2)$

3. Uma permutação é dita *par* se tem sinal $+1$ e dita *ímpar* se tem sinal -1. Mostre que o subconjunto $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \text{sinal}(\sigma) = +1\} \subset S_n$ formado pelas permutações pares é um subgrupo de S_n. Dizemos que A_n é o *subgrupo alternado* de S_n.

4. Determine explicitamente os subgrupos A_3 e A_4 (você vai querer resolver o exercício 6 da Lista 9 antes). Observe que $|A_3| = 3 = |S_3|/2$ e $|A_4| = 12 = |S_4|/2$. Você ganha um sorvete de framboesa se conseguir provar que, para $n \geq 3$,

$$|A_n| = \frac{n!}{2}.$$

5. Você consegue identificar S_3 como sendo um subgrupo de S_4?

6. Escreva cada permutação abaixo como produto de transposições.

(a) $\binom{1\,2\,3\,4}{2\,3\,4\,1}$ (b) $\binom{1\,2\,3\,4\,5}{1\,5\,3\,2\,4}$ (c) $(1\,2)(1\,2\,3)(1\,2)$ (d) $(5\,8\,1)(1\,2)$