Lista 11

1. Seja $S^1 \subset \mathbb{C}$ o círculo unitário. Mostre que $\varphi\colon \mathbb{R} \to S^1$ dado por $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$ é um homomorfismo de grupos cujo núcleo é $\mathbb{Z}$.

2. Mostre que se $f\colon G \to H$ e $g\colon H \to K$ são homomorfismos, então $g \circ f\colon G \to K$ também é um homomorfismo.

3. Seja G um grupo de ordem 4 tal que todo elemento de G diferente de 1 tem ordem 2. Mostre que G é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

4. Prove que se $\varphi\colon G \to H$ é um isomorfismo, então $\varphi^{-1}\colon H \to G$ é um homomorfismo (e logo um isomorfismo também).

5. Mostre que S_3 e $\mathbb{Z}_6$ não são isomorfos.

6. Mostre que $\mathbb{Z}_4$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ não são isomorfos.

7. Se G é um grupo abeliano, então $\varphi\colon G \to G$ dado por $\varphi(g) = g^{-1}$ é um automorfismo.

8. Seja G um grupo qualquer. Fixado $g \in G$, prove que $\iota_g\colon G \to G$ dado por $\iota_g(x) = gxg^{-1}$ é um automorfismo, chamado um *automorfismo interno* de G.

9. Seja G um grupo e defina $\mathrm{Aut}(G) := \{\varphi\colon G \to G \text{ é um isomorfismo}\}$. Mostre que $\mathrm{Aut}(G)$, com a operação de composição, é um grupo, chamado o grupo dos *automorfismos de* G.