UFF - Instituto de Matemática — Álgebra II – 2012/1
Data: 22 março 2012. — Prof.: Nivaldo

Lista 2

1. Dado um inteiro $n > 0$, mostre que:

(a) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$.

(b) $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

2. Dado $n > 0$, seja $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos(2\pi/n) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/n) \in \mathbb{C}$. Mostre que os números complexos $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}$ são distintos dois a dois.

3. Seja k um corpo e $n > 0$. Um elemento $\alpha \in k$ é chamado uma raiz n-ésima *primitiva da unidade* se toda raiz n-ésima da unidade de k pode ser obtida como alguma potência de α.

(a) Encontre todas as raízes 6-ésimas primitivas da unidade em $\mathbb{C}$.

(b) Seja $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$. Prove que ξ^a é uma raiz n-ésima primitiva da unidade de $\mathbb{C}$ se e somente se $\mathrm{mdc}(a, n) = 1$.

4. Encontre todos os elementos associados de

(a) $-4 + 8i$ em $\mathbb{Z}[i]$.

(b) $\frac{3}{4}$ em $\mathbb{Q}$.

(c) $4x^2 - 19x + 6$ em $\mathbb{Z}[x]$.

5. Seja D um domínio. Dados $a, b \in D$, mostre que

$$a \mid b \text{ e } b \mid a \iff a \text{ e } b \text{ são associados.}$$

6. Sejam a, b inteiros não-nulos e $d = \mathrm{mdc}(a, b)$. Mostre que existem inteiros u, v tais que $au + bv = d$. Em particular, se p é primo e $p \nmid n$, então existem inteiros u, v tais que

$$nu + pv = 1$$

e logo $\overline{u}$ é o inverso de $\overline{n}$ módulo p. Deduza a partir daí uma demonstração de que $\mathbb{Z}_p$ é um corpo quando p é primo.

7. Encontre os inteiros u, v como no exercício anterior para o caso em que $p = 23$ e $n = 6$.