UFF - Instituto de Matemática | Álgebra II – 2012/1
Data: 27 março 2012. | Prof.: Nivaldo

Lista 3

1. **V** ou **F**? Justifique sua resposta, apresentando um argumento breve ou um contra-exemplo, conforme o caso.

(a) Se n é par, então $x+1$ divide $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$.

(b) Um polinômio é irredutível em $k[x]$ se e somente se não possui raízes em k.

(c) Em $\mathbb{Z}[x]$, vale que $\text{mdc}(2, x) = 1$.

(d) Não existem polinômios $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ tais que $2f + xg = 1$.

2. (Polinômios reais) Seja $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes *reais*.

(a) Mostre que se $z \in \mathbb{C}$ é uma raiz de f, então $\overline{z}$ também é uma raiz de f (sugestão: se $a \in \mathbb{R}$, então $\overline{a} = a$). Ou seja: raízes complexas de polinômios com coeficientes reais sempre vem em pares conjugados.

(b) Seja $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) uma raiz complexa *não-real* de f (isto é, $b \neq 0$). Prove que

$$q = (x - (a+bi))(x - (a - bi)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in \mathbb{R}[x]$$

divide f. Mais ainda, prove que q é irredutível em $\mathbb{R}[x]$.

(c) Conclua que todo polinômio $f \in \mathbb{R}[x]$ pode ser fatorado na forma

$$f = c(x - r_1) \cdots (x - r_\ell) q_1 \cdots q_m$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, $r_1, \ldots, r_\ell \in \mathbb{R}$ são raízes *reais* de f e $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{R}[x]$ são mônicos e irredutíveis de grau 2.

(d) Encontre uma fatoração em $\mathbb{R}[x]$ dos polinômios $f = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ e $g = x^5 - 1$ como no item anterior.

3. Determine $d = \text{mdc}(f, g)$ em $\mathbb{Q}[x]$ para $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ e $g = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$. Em seguida, encontre $p, q \in \mathbb{Q}[x]$ tais que $pf + qg = d$.