Lista 4

1. Seja $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ o anel dos inteiros de Gauss e considere a função $N\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ dada por $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

(a) Prove que $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$.

(b) Encontre todos os elementos $x \in \mathbb{Z}[i]$ tais que $N(x) = 2$.

(c) Mostre que $1 + i$ é irredutível em $\mathbb{Z}[i]$.

2. Seja k um corpo e seja $f \in k[x]$ um polinômio não-nulo.

(a) Prove que f possui um fator de grau 1 em $k[x]$ se, e somente se, f possui uma raiz em k.

(b) Suponha que $\operatorname{grau} f \leq 3$. Mostre que f é redutível em $k[x]$ se e somente se f possui uma raiz em k.

(c) Dê um exemplo de um corpo k e de um polinômio de grau 4 redutível em $k[x]$ que não possui raízes em k.

3. Seja D um domínio. Um ideal I de D é chamado *principal* se existe um $a \in D$ tal que todo elemento de I é múltiplo de a, isto é,

$$I = \{ax \mid x \in D\}.$$

Neste caso a é chamado um *gerador* de I e escrevemos $I = (a)$. Dizemos que D é um *domínio principal* se todo ideal de D é principal.

O objetivo deste exercício é mostrar que $\mathbb{Z}$ é um domínio principal.

(a) Como aquecimento, considere o conjunto $I = \{4x + 6y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Prove que I é um ideal de $\mathbb{Z}$ e que este ideal é principal.

(b) No item anterior, note que o menor dos elementos *positivos* de I é 2 e que este é um gerador de I; veremos a seguir que não foi obra do acaso.

(c) Suponha que I é um ideal não-nulo arbitrário de $\mathbb{Z}$ e seja a o menor elemento positivo de I. Utilizando a divisão euclidiana, prove que todo elemento de I é um múltiplo de a.

4. Se k é um corpo, mostre que $k[x]$ é um domínio principal (mesmo espírito do exercício anterior).