Lista 6

1. (**V** ou **F**?) Seja D um domínio e $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in D[x]$ um polinômio com $a_0 \cdot a_n \neq 0$. Mostre que f é irredutível em $D[x]$ se e somente se $\tilde{f} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ também é irredutível em $D[x]$.

2. (Divisão euclidiana no anel dos inteiros de Gauss) Seja $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ o anel dos inteiros de Gauss e considere a função $N\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ dada por $N(a + bi) = a^2 + b^2$, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ com $\beta \neq 0$. Mostre que existem $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ unicamente determinados tais que

$$\alpha = q \cdot \beta + r$$

com $0 \leq N(r) < N(\beta)$.

3. Prove que $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ são corpos.

4. Um ideal I de um anel A é *primo* se toda vez que $a, b \in A$ são tais que $a \cdot b \in I$, tem-se $a \in I$ ou $b \in I$.

(a) Prove que um ideal não-nulo (n) de $\mathbb{Z}$ é um ideal primo se e somente se n é um número primo.

(b) Seja k um corpo. Mostre que um ideal não-nulo (f) de $k[x]$ é um ideal primo se e somente se f é um polinômio irredutível em $k[x]$.