

LISTA 8

*No que se segue,  $G$  denota um grupo.*

1. Um elemento  $g \in G$  tem ordem 2 se e somente se  $g = g^{-1}$ .
2. Se  $H$  um subgrupo de  $G$ , então  $gH = H$  se e somente se  $g \in H$ .
3. Se  $G$  é finito, então  $o(g)$  divide  $|G|$  para cada  $g \in G$ .
4. Seja  $D_4$  o grupo das simetrias de um quadrado. Seja  $r_{\pi/2} \in D_4$  a rotação de 90 graus,  $\rho \in D_4$  qualquer uma das quatro reflexões e tome  $H := \langle r_{\pi/2} \rangle$ .
  - (a) Mostre que  $|H| = 4$  e  $\rho \notin H$ .
  - (b) Conclua que  $D_4 = H \cup \rho H$ .
5. Suponha que  $G$  é finito e considere uma cadeia de subgrupos  $K < H < G$ . Usando o teorema de Lagrange, mostre que  $(G : K) = (G : H)(H : K)$ .
6. Dado um elemento  $g \in G$ :
  - (a)  $o(g) = o(g^{-1})$ .
  - (b) Se  $g^n = 1$ , então  $o(g)$  divide  $n$ .
  - (c) Se  $o(g) = mn$ , então  $o(g^m) = n$ .
7. Todo grupo de ordem prima é cíclico.
8. O grupo multiplicativo  $\mathbb{Z}_8^*$  não é cíclico; já o grupo  $\mathbb{Z}_{10}^*$  é cíclico.