Lista 9

1. Seja G um grupo. Prove que a função $\varphi\colon G \to G$ dada por $g \mapsto g^{-1}$ é uma bijeção.

2. Mostre que um grupo G de ordem $2n$ possui pelo menos um elemento de ordem 2 (sugestão: use o exercício anterior e o exercício 1 da Lista 8).

3. Escreva cada permutação abaixo como produto de ciclos disjuntos e calcule a sua ordem.
(a) $\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9}{2\,3\,4\,5\,1\,6\,7\,9\,8}$ (b) $\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{6\,5\,4\,3\,1\,2\,7}$ (c) $(1\,2)(1\,2\,3)(1\,2)$ (d) $(1\,7\,5)^{-1}(5\,8\,1)(1\,2)$

4. Prove que se $\alpha, \beta \in S_n$ são ciclos disjuntos, então $\alpha\beta = \beta\alpha$.

5. Mostre que se $\alpha, \beta \in S_n$ são ciclos disjuntos, então $o(\alpha\beta) = \text{mmc}(o(\alpha), o(\beta))$. Com um exemplo, mostre que isto é falso se os ciclos não são disjuntos.

6. Escreva todos os elementos de S_4 como produto de ciclos disjuntos.

7. Seja $V := \{(1), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$. Mostre que este é um subgrupo de S_4, chamado o *grupo de Klein*.

8. Seja $\sigma \in S_n$ uma permutação. Mostre que o produto

$$\text{sinal}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

sempre vale ± 1 (sugestão: mostre que os números que aparecem nos numeradores, são, a menos de sinal e de ordem, os que aparecem nos denominadores). Definimos este número como sendo o *sinal* da permutação σ.

9. Prove que $(1k) = (2k)(12)(2k)$ e $(ij) = (j1)(i1)(j1)$ $(i, j, k \notin \{1, 2\})$.

10. Mostre que toda transposição tem sinal -1 (sugestão: prove que $\text{sinal}(12) = -1$ e utilize o exercício anterior juntamente com o fato de que a função sinal é multiplicativa).