1. Interpolação de Lagrange

Nada melhor para começar do que a célebre frase

"*Por dois pontos distintos no plano passa uma única reta*".

Como generalizar? Ou seja, dada uma coleção de pontos no plano, buscamos por uma curva que *interpole* esses pontos, ou seja, que passe por todos eles. Este é um problema que aparece em muitas aplicações e possui várias soluções (curvas de Bézier, utilizadas em design industrial, etc.) Veremos aqui um dos métodos mais simples. Nosso ponto de partida é observar que uma reta no plano é dada como o gráfico de uma equação polinomial de grau 1 (desde que a reta não seja vertical).

A questão: dados $n+1$ pontos no plano com abscissas distintas, é possível encontrar um polinômio de grau $\leq n$ cujo gráfico passe por todos esses pontos?

A resposta: **sim!**

Alguns exemplos para nos familiarizarmos com o problema.

Exemplo 1.1.

(1) $n = 2$: sejam $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ com $a_1 \neq a_2$. Queremos encontrar a equação da reta $f(x) = ax + b$ que passa por estes pontos, ou seja, buscamos resolver

$$\begin{cases} aa_1 + b = b_1 \\ aa_2 + b = b_2 \end{cases}$$

o que corresponde a resolver o sistema matricial

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

onde a e b são as incógnitas. Há vários métodos resolver este sistema. Utilizaremos aqui a regra de Cramer, já pensando no caso geral. Como $a_1 \neq a_2$, temos que $\Delta = \det\left(\begin{smallmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ e logo o sistema possui uma única solução, a saber, $a = \Delta_1/\Delta$ e $b = \Delta_1/\Delta$, onde

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Note que se $b_1 = b_2$, então obtemos a função constante $f(x) = b_1$ (de grau 0); e se $b_1 \neq b_2$ então $a \neq 0$ e obtemos um polinômio de grau 1.

(2) $n = 3$: o mesmo método se aplica. Tome $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in \mathbb{R}^2$ com a_1, a_2, a_3 distintos entre si. Buscamos por uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

cujo gráfico passe pelos três pontos dados; isto corresponde a resolver o sistema

$$\begin{cases} aa_1^2 + ba_1 + c = b_1 \\ aa_2^2 + ba_2 + c = b_2 \\ aa_3^2 + ba_3 + c = b_3 \end{cases}$$

que corresponde a resolver o sistema matricial

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

A matriz 3x3 do lado esquerdo é uma *matriz de Vandermonde* e seu determinante é $\Delta = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)$ e logo não nulo, uma vez que supomos os a_i's distintos entre si. Como antes o sistema tem solução única, dada pela regra de Cramer.

(3) $n \geq 4$: pode ser resolvido de maneira análoga. Para $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ com abscissas distintas, obteremos um sistema linear com uma matriz de Vandermonde $n \times n$ e um (único) polinômio de grau $\leq n - 1$ que interpole estes pontos.

Vejamos agora uma outra maneira de resolver este problema. De fato, não há motivo nenhum para nos restringirmos aos números reais, o resultado vale em qualquer corpo.

Teorema 1.2 (Interpolação de Lagrange)**.** *Seja* k *um corpo e* $a_1, \ldots, a_{n+1} \in k$ *distintos entre si. Então dados* $b_1, \ldots, b_{n+1} \in k$ *quaisquer, existe um único polinômio de grau* $\leq n$ *(possivelmente nulo) tal que* $f(a_i) = b_i$ *para cada* $i = 1, \ldots, n+1$.

Demonstração.

Unicidade. Suponha que $f, g \in k[x]$ tenham grau $\leq n$ sejam tais que $f(a_i) = g(a_i)$ para $i = 1, \ldots, n+1$ e considere o polinômio $h = f - g$. Se $h \neq 0$, então h seria um polinômio de grau $\leq n$ tendo $a_1, \ldots, a_{n+1}$ como raízes em k, o que não é possível. Logo $h = 0$, ou seja, $f = g$.

Existência. De fato é bem simples: basta considerar o polinômio

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \frac{(x - a_1) \cdots \widehat{(x - a_i)} \cdots (x - a_{n+1})}{(a_i - a_1) \cdots \widehat{(a_i - a_i)} \cdots (a_i - a_{n+1})}$$

onde $\widehat{\ }$ indica que o termo deve ser omitido. A mesma expressão, expandida:

$$f(x) = b_1 \frac{(x - a_2)(x - a_3) \cdots (x - a_{n+1})}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \cdots (a_1 - a_{n+1})} + b_2 \frac{(x - a_1)(x - a_3) \cdots (x - a_{n+1})}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \cdots (a_2 - a_{n+1})} + \cdots$$
$$+ b_{n+1} \frac{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)}{(a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_2) \cdots (a_{n+1} - a_n)}.$$

□

Lagrange levou a fama (publicação de 1795), mas esta fórmula foi publicada por Waring em 1779 e redescoberta por Euler em 1783.