1. Derivadas e multiplicidades de raízes

Seja k um corpo e $f \in k[x]$ um polinômio não nulo. Recorde que um elemento $a \in k$ é uma raiz de f se $f(a) = 0$ e, como vimos, isso acontece se e somente se $(x - a)$ divide f. Uma raiz a de f é *simples* se $(x - a) \mid f$ mas $(x - a)^2 \nmid f$. Em geral, dizemos que uma raiz a tem *multiplicidade* m se $(x - a)^m \mid f$ mas $(x - a)^{m+1} \nmid f$.

Assim, as raízes simples são exatamente as de multiplicidade 1. Geometricamente, uma raiz é simples se o gráfico de $y = f(x)$ intersecta transversalmente o eixo x no ponto a. Se a multiplicidade é ≥ 2, então o gráfico tangencia o eixo x em a; e quanto maior a multiplicidade, maior a "ordem de contato" do gráfico com o eixo x.

Veremos agora uma maneira de determinar a multiplicidade de raízes utilizando a derivada. Para começar, recorde dos bons momentos do seu curso de Cálculo que dada uma função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a derivada de f no ponto a é definida por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1.1}$$

quando este limite existir. Geometricamente, a derivada $f'(a)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$. Assim, para que uma raiz $a \in \mathbb{R}$ de f seja simples, a condição é que a tangente não seja horizontal, isto é, que $f'(a) \neq 0$. Intuitivamente, quanto maior a ordem de anulamento das derivadas (isto é, se $f'(a) = 0, f''(a) = 0$, etc), maior deveria ser a multiplicidade da raiz. A intuição aqui funciona. De fato, o que faremos a seguir é demonstrar isso de maneira precisa.

Precisamos de alguns preparativos. Em primeiro lugar, aqui no nosso curso de Álgebra temos essa obsessão (termo travesso para dizer necessidade) em trabalhar com corpos quaisquer, não somente sobre os números reais. O que significa tomar o limite em um corpo abstrato qualquer? E para corpos com um número finito de elementos? Há muito a ser dito aqui, mas vamos tomar um outro caminho, inspirados no que já acontece nos números reais: para funções polinomiais $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ (com $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$), temos que

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 \tag{1.2}$$

é a derivada de f, uma outra função polinomial. Faz sentido imitar isso em qualquer corpo... e é exatamente isso que faremos.

Definição 1.1. Seja k um corpo. Dado um polinômio $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in k[x]$, a *derivada de* f é o polinômio

$$f' = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 \in k[x].$$

Esta é uma definição puramente formal e que faz sentido qualquer que seja o corpo k. E como em toda generalização que se preze, abrimos a porta para surpresas.

Exemplo 1.2.

(1) Seja $f = 8x^3 - 5x^2 + 4x - 11 \in \mathbb{R}[x]$. Então $f' = 24x^2 - 10x + 4$, que é exatamente o que obtemos com a definição original da derivada; de fato, as duas noções coincidem para todo polinômio $f \in \mathbb{R}[x]$.

(2) Seja $f = \overline{4}x^9 + x^3 + \overline{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$. Então $f' = \overline{36}x^8 + \overline{3}x^2 = \overline{0}$ em $\mathbb{Z}_3[x]$. Ou seja, a derivada de um polinômio não-constante pode ser identicamente nula! Isso não ocorre nos números reais, em virtude do Teorema do Valor Médio. Moral da história: cuidado.

Mesmo sendo uma definição formal, várias das propriedades conhecidas para derivadas continuam valendo. Vejamos algumas. Denote $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$, $f^{(2)} := f''$, $f^{(3)} := f'''$, etc.

(a) Se f é um polinômio constante, então $f' = 0$.
(b) $(f+g)' = f' + g'$.
(c) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
(d) (Leibniz) $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} \cdot g^{(n-i)}$.

Note a similaridade de (d) com a fórmula do binômio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

A demonstração das identidades (a)–(d) fica como exercício, que deve ser resolvido de maneira puramente formal, exclusivamente a partir da definição. Não vale utilizar (1.1).

Voltando às multiplicidades: como utilizar a derivada? Nosso primeiro resultado:

Teorema 1.3. *Sejam k um corpo, $f \in k[x]$ um polinômio. Uma raiz $a \in k$ de f é simples se e somente se $f(a) = 0$ e $f'(a) \neq 0$.*

Demonstração. Seja a uma raiz de f. Então $f = (x-a)g$ para algum polinômio $g \in k[x]$. Note que a é uma raiz simples de f se e somente se $(x-a) \nmid g$.

Calculemos a derivada de f. Pela propriedade (b) acima,

$$f' = g + (x-a)g'$$

e logo $f'(a) \neq 0$ se e somente se $g(a) \neq 0$; mas isto acontece se e somente se $(x-a) \nmid g$, o que finaliza a demonstração. $\square$

Fica para você a tarefa de provar que o resultado geral (tente seguir a mesma linha do teorema anterior e, claro, há de se usar (d)):

Teorema 1.4. *Sejam k um corpo, $f \in k[x]$ um polinômio. Uma raiz $a \in k$ de f tem multiplicidade m se e somente se $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ e $f^{(m)}(a) \neq 0$.*