UFF - Instituto de Matemática — Álgebra II – 2012/A1

Data: 26 abril 2012. — Prof.: Nivaldo

Prova 1 (valor: 9,0)

1. (*1,5*) Investigue a irredutibilidade em $\mathbb{Q}[x]$ dos polinômios abaixo, justificando sua resposta.

(a) $x^6 + x^3 + x + 1$

(b) $3x^8 - 14x^5 + 49x + 77$

(c) $x^3 + 6x + 1$

2. Considere o polinômio $f = x^4 + 4 \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) (*2,0*) Determine todas as raízes complexas de f.

(b) (*1,0*) Apresente uma fatoração de f em polinômios mônicos irredutíveis em $\mathbb{C}[x]$ e em $\mathbb{R}[x]$.

3. (*1,0*) Calcule: mdc$(x^{10} - 1, x^6 - 1)$.

4. (*1,5*) Sejam $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ tais que mdc$(f, g) = 1$. Prove que f e g não possuem uma raiz complexa comum, isto é, não existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = g(z) = 0$.

5. (*2,0*) Seja k um corpo e $f, g \in k[x]$ polinômios de grau $\leq n$. Suponha que existam elementos $a_1, \ldots, a_{n+1} \in k$ distintos entre si tais que $f(a_i) = g(a_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n+1$. Prove que $f = g$.

Boa prova!