1. Raízes e radicais

Discutimos aqui o problema de determinar raízes de polinômios. Para iniciar a conversa, tome um polinômio $f \in \mathbb{R}[x]$. Pelo teorema Fundamental da Álgebra, sabemos que as raízes de f são todas números complexos. Gostaríamos de uma fórmula ou, pelo menos, um algoritmo para encontrar essas raízes. Não pretendo pessimismo, mas não há solução plenamente satisfatória para este problema: se f é escolhido ao acaso, não é possível determinar suas raízes precisamente. No melhor dos casos (e suficiente para a maioria das aplicações), podemos encontrar aproximações de maneira tão precisa quanto se necessite — com dez ou vinte ou quinhentas casas decimais de precisão, digamos — mas este é tema mais afim da Análise Numérica do que da Álgebra.

Nossa busca aqui é em outra direção: procuramos fórmulas exatas; e tais fórmulas existem para polinômios de grau pequeno. Outro aspecto é que, como sempre, nos preocupamos em trabalhar sobre corpos quaisquer. Para simplificar a discussão, sempre trabalharemos sobre o corpo dos números racionais ou qualquer subcorpo k dos números complexos.

2. Equações lineares e quadráticas

Começamos com polinômios de grau 1. Não há muito a dizer aqui: uma equação

$$ax + b = 0 \qquad (a, b \in k, \quad a \neq 0)$$

possui apenas uma solução, a saber, $x = -b/a$.

Em grau 2 as coisas ficam um pouco mais interessantes. Procuramos resolver

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \in k, a \neq 0) \tag{1}$$

Há dois caminhos aqui, essencialmente equivalentes: completar o quadrado ou fazer a substituição $x = y - b/2a$. No último caso, obtemos

$$a(y - \frac{b}{2a})^2 + b(y - \frac{b}{2a}) + c = ay^2 - by + \frac{b^2}{4a} + by - \frac{b^2}{2a} + c = ay^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

ou seja, para resolvermos a equação (1) basta resolvermos

$$ay^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

e isso sabemos fazer: as soluções são $y = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Substituindo agora o valor de x, reobtemos a expressão familiar:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2}$$

Em retrospectiva, o que fizemos foi transmutar (1) em uma equação mais simples, da forma $y^2 - \alpha = 0$, que declaramos saber resolver. Essa vai ser uma das estratégias que seguiremos adiante.

3. Equações cúbicas

Prosseguindo, passemos às equações de grau 3. A fórmula para as raízes é bem conhecida (remonta a del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari) e existem versões desde o séc. XV. Vejamos uma maneira de deduzi-la. Considere

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (a, b, c, d \in k, a \neq 0) \tag{3}$$

Tome $x = y - b/3a$. Como exercício, você pode verificar que esta substituição elimina o termo de grau 2; somos levados a uma equação do tipo $ay^3 + ry + s = 0$ onde $r, s \in k$. Dividindo por a, chegamos a

$$y^3 + py + q = 0 \tag{4}$$

com $p = r/a$ e $q = s/a$. Passemos a resolvê-la. Nossa estratégia é supor que podemos escrever uma raiz como uma soma

$$y = u + v \tag{5}$$

com u, v ambos não nulos. Substituindo em (4),

$$\begin{aligned} &(u+v)^3 + p(u+v) + q \\ &= u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v) \end{aligned}$$

e logo para encontrar uma raiz é *suficiente* que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases} \tag{6}$$

e, passe de mágica, temos um sistema que podemos resolver. Fazendo $v = -p/3u$ e substituindo,

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

e fazendo $u^3 = z$, obtemos

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

uma equação quadrática, com a qual já sabemos lidar: $z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Escolhendo

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e fazendo contas, obtemos

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Para obter as outras soluções, basta observar que se u, v são soluções de (6) e $\omega = e^{2\pi i/3}$, então os pares $\omega u, \omega^2 v$ e $\omega^2 u, \omega v$ também são outras soluções distintas. Em resumo, as raízes de (6) são

$$\begin{aligned} y_1 &= u + v \\ y_2 &= \omega u + \omega^2 v \\ y_3 &= \omega^2 u + \omega v \end{aligned}$$

É curioso observar que pelo menos uma destas três raízes sempre é um número real.

A expressão

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{7}$$

para as raízes é também uma fonte de surpresas. Por exemplo

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

tem uma única raiz real (use derivadas, por exemplo), a saber, 2. Assim, segue de (7) que

$$\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = 2$$

que não é exatamente evidente. Um monte de outras identidades quase espetaculares também podem ser obtidas de forma similar, mesmo em grau superior, como por exemplo

$$\sqrt[5]{712 + \sqrt{506945}} + \sqrt[5]{712 - \sqrt{506945}} = 4.$$

4. Equações de grau superior

Existem fórmulas também para raízes de equações de grau 4, devidas a Ferrari, Descartes, Lagrange, entre outros. Convido você a dar uma olhada nas notas de aula da profa. Maria Lúcia Villela aqui da UFF ou no livro de John Stillwell, *Elements of Algebra*.

Entretanto, não existem tais fórmulas para equações de grau 5 em diante!! Isto foi provado inicialmente por Ruffini (com ressalvas) e por Abel, mas a teoria definitiva para esta situação foi estabelecida por E. Galois, no séc. XVIII. A pergunta, de fato, é a seguinte: dada uma equação polinomial

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

quando é possível encontrar uma expressão para as raízes que envolvam somente as operações $+, -, \cdot, /, \sqrt[n]{\ }$ aplicadas aos coeficientes? Quando isto acontece, dizemos que o polinômio é *solúvel por radicais*. Para equações quadráticas, cúbicas e quárticas isto sempre ocorre, mas não em geral!

A compreensão das técnicas para demonstrar isto é assunto de um curso de Teoria de Galois: para cada polinômio sobre o corpo k, associa-se um grupo finito, chamado o *grupo de Galois* do polinômio; o resultado de Galois é que um polinômio é solúvel por radicais se e somente se seu grupo de Galois possui uma propriedade especial — o nome técnico é *solúvel*. Mais ainda, é relativamente simples verificar se um dado grupo é solúvel ou não.

Há várias ótimas referências para aprender mais sobre o assunto; minha predileção recai sobre os livros *Galois Theory*, de Ian Stewart e *Algebra*, de Michael Artin. Para terminar, um exemplo concreto: o polinômio de grau 5

$$x^5 + x - 1$$

não é solúvel por radicais: não existe uma fórmula para expressar suas raízes utilizando apenas as operações $+, -, \cdot, /, \sqrt[n]{\ }$ aplicadas aos coeficientes.