Lista 5

1. Investigue a irredutibilidade em $\mathbb{Z}[x]$ dos polinômios abaixo:

(a) $x^{12} + 14x^5 + 21x + 7$

(b) $x^{12} + 5x^4 + 5x^2 + 15$

(c) $x^4 + 3x^2 - 1$

(d) $6x^3 - 18x^2 + 6$

(e) $x^3 + 5x^2 + 25$

(f) $x^4 + x^3 + x + 1$

(g) $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 36x + 6$

(h) $x^{180} - 2$

2. O polinômio $6x^3 - 18x^2 + 6$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$?

3. Seja $f = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Mostre que $\overline{f}$ é irredutível em $\mathbb{Z}_2[x]$. Investigue a irredutibilidade de $\overline{f}$ em $\mathbb{Z}_3[x]$ e $\mathbb{Z}_5[x]$.

4. Seja $n \geq 1$ um inteiro.

(a) Prove que existe um polinômio irredutível em $\mathbb{Q}[x]$ de grau n.

(b) Mostre que existem infinitos polinômios irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$ de grau n.

5. Determine os números racionais c tais que $x^2 + x + c$ seja irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

6. Determine os pares $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + bx + c$ seja irredutível em $\mathbb{R}[x]$.

7. Seja $n > 0$ um inteiro. Dado um polinômio $f = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, seja $\overline{f} := \overline{a}_r x^r + \cdots + \overline{a}_1 x + \overline{a}_0 \in \mathbb{Z}_n[x]$ o polinômio cujos coeficientes são dados pelas classes residuais dos coeficientes de f. Mostre que a função $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_n[x]$ dada por $\varphi(f) = \overline{f}$ é um homomorfismo de anéis.

8. Mostre que se $n > 0$ é um número composto, então $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ é *redutível* em $\mathbb{Z}[x]$ (sugestão: escreva $n = ab$, substitua $y = x^a$ e fatore $y^b - 1$).