Lista 1

1. Encontre todas as raízes em $\mathbb{C}$ dos polinômios abaixo.
(a) x^5+1 (b) x^8-1 (c) x^4-6i (d) x^3+x-2

2. Determine um polinômio real de grau 5 que tenha como raízes $3,\ 2+4i$ e $\sqrt{2}-i$.

3. Dado um inteiro $n>0$, mostre que:

(a) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$.
(b) $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$.

4. Dado $n>0$, seja $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}=\cos(2\pi/n)+i\,\mathrm{sen}(2\pi/n)\in\mathbb{C}$. Mostre que os números complexos $1,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1}$ são distintos dois a dois.

5. Um elemento $\alpha\in\mathbb{C}$ é chamado uma raiz n-ésima *primitiva da unidade* se toda raiz n-ésima da unidade de k pode ser obtida como alguma potência de α.

(a) Encontre todas as raízes 6-ésimas primitivas da unidade em $\mathbb{C}$.
(b) Seja $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}\in\mathbb{C}$. Prove que ω^a é uma raiz n-ésima primitiva da unidade de $\mathbb{C}$ se e somente se $\mathrm{mdc}(a,n)=1$.

6. Faça um esboço das curvas planas $\varphi\colon\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{C}$ dadas por
(a) $\varphi(t)=t\cdot e^{it}$ (b) $\varphi(t)=(t-i)^2$

7. Seja k um corpo qualquer e seja $f\in k[x]$ um polinômio. Mostre que se $\operatorname{grau} f\leq 3$, então f é *redutível* (ou seja, existem $g,h\in k[x]$ não constantes tais que $f=g\cdot h$) se, e somente se, f possui uma raiz em k.

8. Dê um exemplo de um polinômio de grau 4 em $\mathbb{Q}[x]$ que é redutível mas não possui raízes em $\mathbb{Q}$.

9. (Gauss) Seja $f=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$. Se $p/q\in\mathbb{Q}$ é uma raiz de f e $\mathrm{mdc}(p,q)=1$, então $q\mid a_n$ e $p\mid a_0$.

10. Encontre todas as raízes racionais do polinômio $4x^4-8x^3+x+3$.

11. Encontre um polinômio real de grau ≤ 3 cujo gráfico passe pelos pontos

$$(1,4),\ (-1,5),\ (2,-2)\quad \text{e}\quad (0,1).$$