Lista 2

1. Sejam a, b elementos de um anel A. Mostre:
(a) $\text{mdc}(a, 0) = a$ (b) se a é invertível, então $\text{mdc}(a, b) = 1$.

2. Seja D um domínio. Mostre que $(D[x])^* = D^*$.

3. Verifique que $\overline{2}x + \overline{1}$ é invertível em $\mathbb{Z}_4[x]$.
Bônus: mostre que $\mathbb{Z}_4[x]$ possui infinitos elementos invertíveis.

4. Seja $A = \mathbb{R}[x, y]$ o anel de polinômios reais em duas variáveis. Mostre que o ideal

$$(x, y) = \{x \cdot f + y \cdot g \mid f, g \in \mathbb{R}[x, y]\}$$

não é um ideal principal.

5. Calcule o máximo divisor comum em $\mathbb{Q}[x]$ para cada par de polinômios abaixo:

(a) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ e $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$.
(b) $4x^5 + 7x^3 + 2x^2 + 1$ e $3x^3 + x + 1$.

6. Determine os números racionais c tais que $x^2 + x + c$ seja irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

7. Determine os pares $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + bx + c$ seja irredutível em $\mathbb{R}[x]$.

8. Seja $n > 0$ um inteiro. Dado um polinômio $f = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, seja $\overline{f} := \overline{a}_r x^r + \cdots + \overline{a}_1 x + \overline{a}_0 \in \mathbb{Z}_n[x]$ o polinômio cujos coeficientes são dados pelas classes residuais dos coeficientes de f. Mostre $\varphi(f) = \overline{f}$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}[x]$ em $\mathbb{Z}_n[x]$.

9. Mostre que se $n > 2$ é um número *composto*, então $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ é *redutível* em $\mathbb{Z}[x]$ (sugestão: escreva $n = ab$, fatore $y^b - 1$ como na Lista 1 e substitua $y = x^a$).