Lista 3

1. Investigue a irredutibilidade em $\mathbb{Z}[x]$ dos polinômios abaixo:

(a) $x^{12} + 14x^5 + 21x + 7$
(b) $x^{12} + 5x^4 + 5x^2 + 15$
(c) $x^4 + 3x^2 - 1$
(d) $6x^3 - 18x^2 + 6$
(e) $x^3 + 5x^2 + 25$
(f) $x^4 + x^3 + x + 1$
(g) $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 36x + 6$
(h) $x^{180} - 2$

2. O polinômio $6x^3 - 18x^2 + 6$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$?

3. Seja $f = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Mostre que $\overline{f}$ é irredutível em $\mathbb{Z}_2[x]$. Investigue a irredutibilidade de $\overline{f}$ em $\mathbb{Z}_3[x]$ e $\mathbb{Z}_5[x]$.

4. Seja $n \geq 1$ um inteiro.

(a) Prove que existe um polinômio irredutível em $\mathbb{Q}[x]$ de grau n.
(b) Mostre que existem infinitos polinômios irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$ de grau n.

5. Seja $f \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio não-constante. Dado $u \in \mathbb{C}$, vimos em sala que u é raiz de f se e somente se $x - u \mid f$ em $\mathbb{C}[x]$.

Dizemos que u é uma raiz *simples* de f se $x-u$ divide f mas $(x-u)^2 \nmid f$. Raízes simples são caracterizadas através da derivada. Mostre que:

$$u \text{ é raiz simples de } f \iff f(u) = 0 \text{ mas } f'(u) \neq 0.$$

6. Generalizando o exercício anterior, dizemos que $u \in \mathbb{C}$ é uma raiz de *multiplicidade* m de f se $(x-u)^m \mid f$ mas $(x-u)^{m+1} \nmid f$. Para caracterizar a multiplicidade de uma raiz usamos derivadas de ordem superior, do seguinte modo:

$$\begin{array}{c} u \text{ é uma raiz de} \\ \text{multiplicidade } m \geq 2 \text{ de } f \end{array} \iff \begin{array}{l} f(u) = f'(u) = \cdots = f^{(m-1)}(u) = 0 \quad \text{e} \\ f^{(m)}(u) \neq 0. \end{array}$$

7. Sejam f, g polinômios irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$. Suponha que eles possuam uma raiz complexa comum, isto é, que exista $u \in \mathbb{C}$ tal que $f(u) = g(u) = 0$. Mostre que existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que $f = a \cdot g$.

8. Seja k um corpo. Dados $f, g \in k[x]$ não constantes, tome uma fatoração de f e g como produto de irredutíveis:

$$f = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n} \quad \text{e} \quad g = p_1^{b_1} \cdots p_n^{b_n}$$

onde $a_i \geq 0$ e $b_i \geq 0$. Sejam $c_i = \min\{a_i, b_i\}$ e $m_i = \max\{a_i, b_i\}$. Mostre que

$$\text{mdc}(f, g) = p_1^{c_1} \cdots p_n^{c_n} \quad \text{e} \quad \text{mmc}(f, g) = p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}.$$