Lista 4

1. Determine se os conjuntos abaixo, com as operações indicadas, são grupos. Caso não sejam, diga quais os axiomas de grupo não são válidos.

(a) $G = \mathbb{Z}$, $a * b := a - b$.

(b) $G = \mathbb{N}$, $a * b := ab$.

(c) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $a * b := ab$.

(d) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $a * b := a + b$.

(e) $G = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 x_2, y_1 + y_2)$.

2. Dados $a, b \in G$, mostre que $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

3. Se H, K são subgrupos de G, então $H \cap K$ é um subgrupo de G.

4. Seja H um subconjunto de um grupo G. Mostre que H é um subgrupo de G se e somente $H \neq \emptyset$ e

$$\forall a, b \in H \implies a \cdot b^{-1} \in H.$$

5. Seja $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ o conjunto dos números complexos de norma 1 (i.e., o círculo unitário). Prove que S^1 é um subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}^*$.

6. Calcule a ordem dos elementos abaixo:

a) $\overline{4}$ em $\mathbb{Z}_7$ b) $\overline{4}$ em $\mathbb{Z}_{10}$ c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ em S_4 d) 3 em $\mathbb{R}^*$ e) $r_{2\pi/3}$ em D_6.

7. Sejam G, H grupos. O *produto direto* de G por H é o conjunto $G \times H$ com a operação

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

(a) Se G e H são abelianos, então $G \times H$ é abeliano.

(b) Mostre que o grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ é abeliano de ordem 4 mas não é cíclico.

(c) Mostre que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ é um grupo cíclico.

8. Prove que $(\mathbb{Z}_n, +)$ é um grupo cíclico. Em seguida, mostre que uma classe $\overline{a}$ é um gerador de $\mathbb{Z}_n$ se e somente se $\mathrm{mdc}(a, n) = 1$.

9. Mostre que todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ é da forma nZ, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

10. Sejam $x = \binom{1\,2\,3\,4}{2\,3\,4\,1}$ e $y = \binom{1\,2\,3\,4}{3\,1\,2\,4}$ permutações em S_4. Calcule x^2y^2x.

11. Prove que se $n > 2$, então S_n não é abeliano. Uma dica: considere as permutações

$$x = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,\cdots\,n \\ 2\,1\,3\,4\,\cdots\,n \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad y = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,\cdots\,n \\ 3\,2\,1\,4\,\cdots\,n \end{pmatrix}.$$

Elas comutam entre si?

12. Escreva a tabela do grupo S_3 das permutações de 3 elementos.