Lista 5

No que se segue, G *denota um grupo.*

1. Escreva cada permutação abaixo como produto de ciclos disjuntos e como produto de transposições. Em seguida, calcule seu sinal e sua ordem.

(a) $\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9}{2\,3\,4\,5\,1\,6\,7\,9\,8}$ (b) $\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{6\,5\,4\,3\,1\,2\,7}$ (c) $(12)(123)(12)$ (d) $(12349)(2348)(347)$

2. Dado $g \in G$:

(a) Se $g \neq 1$, então g tem ordem 2 se e somente se $g = g^{-1}$.

(b) $o(g) = o(g^{-1})$.

(c) Se $g^n = 1$, então $o(g)$ divide n.

(d) Se $o(g) = mn$, então $o(g^m) = n$.

3. O *centro* de G é definido como o conjunto dos elementos que comutam com todos os elementos de G, isto é,

$$Z(G) = \{x \in G \mid gx = xg,\ \forall g \in G\}.$$

Note que G é abeliano se e só se $Z(G) = G$. Mostre que $Z(G)$ é um subgrupo de G.

4. Determine $Z(S_3)$ e $Z(D_4)$.

5. Em D_4 (simetrias do quadrado), seja r a rotação de 90 graus e tome $H = \langle r \rangle$.

(a) Mostre que $|H| = 4$.

(b) Nenhuma das reflexões pertence a H.

(c) Conclua que $D_4 = H \cup \tau H$, para qualquer reflexão $\tau \in D_4$.

(d) Conclua que, sem calcular explicitamente as classes laterais, que $\tau H = H\tau$ para toda reflexão τ.

6. Dados inteiros positivos m, n, determine o índice do subgrupo $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

7. Suponha que G é finito e considere uma cadeia de subgrupos $K < H < G$. Usando o teorema de Lagrange, mostre que $(G : K) = (G : H)(H : K)$.

8. Seja $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2,\ ad - bc \neq \bar{0} \right\}$.

(a) Mostre que G é um grupo com a multiplicação usual de matrizes e determine a sua ordem.

(b) Calcule a ordem de $\left(\begin{smallmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{smallmatrix}\right)$.

(c) O grupo G é cíclico?

9. Todo grupo de ordem prima é cíclico.

10. O grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_8^*$ não é cíclico.

11. O grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_{10}^*$ é cíclico.