UFF - Instituto de Matemática — Álgebra III – 2013/1

Data: 02 maio 2013. — www.professores.uff.br/nmedeiros

Entrega: 09 maio 2013.

Lista 1

1. Escreva cada permutação abaixo como produto de ciclos disjuntos, calcule seu sinal e sua ordem.

(a) $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 2&3&4&5&1&6&7&9&8 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 6&5&4&3&1&2&7 \end{pmatrix}$ (c) $(1\,2)(1\,2\,3)(1\,2)$

2. Sejam a, b, c, d inteiros distintos. Verifique que:

$$(ab)(cd) = (abc)(bcd) \quad \text{e} \quad (ab)(bc) = (abc).$$

Como aplicação, prove que se H é um subgrupo de A_n que contém todos os 3-ciclos, então $H = A_n$.

3. Mostre que a composição de homomorfismos de grupos é um homomorfismo.

4. S_3 e $\mathbb{Z}_6$ são isomorfos?

5. $G \times H$ é abeliano se e somente se G e H são abelianos: verdadeiro ou falso?

6. (Teorema Chinês dos Restos) Sejam m, n inteiros e considere o homomorfismo $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ dado por $\varphi(a) = (\overline{a}, \overline{\overline{a}})$.

(a) Mostre que seu núcleo é $\operatorname{mmc}(m, n)\mathbb{Z}$;

(b) Mostre que se m, n são primos entre si, então $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$;

(c) Generalize o item (b) para inteiros $m_1, \ldots, m_k$ relativamente primos dois a dois.

Automorfismos.

7. Um *automorfismo* de um grupo G é um isomorfismo de G em si mesmo. Mostre que $\operatorname{Aut}(G)$ (o conjunto dos automorfismos de G) com a operação de composição, é um grupo.

8. Se G é um grupo abeliano, então $\varphi\colon G \to G$ dado por $\varphi(g) = g^{-1}$ é um automorfismo.

9. Seja G um grupo. Fixado $g \in G$, defina $\iota_g\colon G \to G$ por $\iota_g(x) := gxg^{-1}$.

(a) Mostre que ι_g é um automorfismo de G.

(b) Seja $\operatorname{Int} G := \{\iota_g \mid g \in G\}$. Mostre que $\operatorname{Int} G$ é um subgrupo normal de $\operatorname{Aut} G$ (denominado o subgrupo dos *automorfismos internos de* G).

(c) Prove que $\operatorname{Int} G \cong G/Z(G)$, onde $Z(G)$ é o centro de G. (Sugestão: mostre que $g \mapsto \iota_g$ define um homomorfismo sobrejetor de G em $\operatorname{Int} G$).