Lista 2

1. Mostre que se $n \geq 3$, então S_n não é abeliano. Calcule $Z(S_3)$ e S_3'.

2. Sejam M, N dois subgrupos normais de um grupo G. Vimos que $M \cdot N$ também é um subgrupo normal.

(a) Mostre que se $M \cap N = \{1\}$, então $xy = yx$ para todo $x \in M$, $y \in N$.

(b) Prove que se $M \cdot N = G$ e $M \cap N = \{1\}$, então a função $\varphi\colon M \times N \to G$ dada por $(x, y) \mapsto xy$ é um isomorfismo.

3. Se A e B são subgrupos de um grupo finito tais que mdc$(|A|, |B|) = 1$, então $A \cap B = \{1\}$.

4. Seja N um subgrupo normal de um grupo G. Mostre que se G é abeliano, então G/N é abeliano; e se G é cíclico, então G/N é cíclico. Alguma das recíprocas é válida?

5. O *normalizador* (*centralizador*) um elemento $g \in G$ é $C(g) := \{x \in G \mid gx = xg\}$. Prove:

(a) $C(g)$ é um subgrupo de G.

(b) $g \in Z(G)$ se, e somente se, $C(g) = G$.

(c) $Z(G) = \bigcap_{g \in G} C(g)$.

6. O grupo multiplicativo $\mathbb{Q}^*$ é cíclico? E o grupo aditivo $\mathbb{Q}$?

7. É verdade que $\mathbb{R}^2 = \langle S^1 \rangle$ como grupos abelianos? Ou seja: todo vetor do plano se escreve como uma soma finita de vetores de norma 1?

8. Prove que um grupo cíclico de ordem n possui exatamente $\phi(n)$ geradores, onde ϕ é a função de Euler (sugestão: $\mathbb{Z}_n$).

9. Seja G um grupo finito tal que, para cada divisor d da ordem de G, tem-se que G possui no máximo um subgrupo de ordem d. Prove que G é cíclico.

<u>Roteiro</u>: sejam n a ordem de G e n_d o número de elementos de ordem d em G. Vamos provar que $n_d = \phi(d)$ para todo fator d de n. Em particular, G possui $\phi(n)$ elementos de ordem n.

Observe que $\sum_{d|n} n_d = n$. Como $n = \sum_{d|n} \phi(d)$, basta então mostrar $n_d \leq \phi(d)$ para todo $d \mid n$, onde entra a hipótese.

10. Seja F um <u>domínio</u>. Então todo subgrupo finito G de F^* é cíclico (sugestão: use o exercício anterior; note que o polinômio $x^d - 1$ tem no máximo d raízes no domínio F). Em particular, se F é um corpo finito, então F^* é cíclico.