Lista 3

1. Um grupo de ordem $11^2 \cdot 13^2$ é abeliano.

2. Seja G um grupo de ordem 28. Se G possui um subgrupo normal de ordem 4, então G é abeliano.

3. Se p é um primo ímpar, então um grupo de ordem $2p$ possui um subgrupo normal não trivial.

4. Todo grupo de ordem 33, 35 ou 65 é cíclico.

5. Seja G um grupo com $|G| = pq$, $p < q$ números primos. Se p não divide $q-1$, então G é cíclico.

6. Seja G um grupo com ordem p^2q, p, q primos distintos. Prove que G tem um subgrupo normal não trivial.

7. Seja G um grupo de ordem 30. Prove:

(a) Os subgrupos de ordens 3 e 5 são normais em G.

(b) Existe um subgrupo normal de G com ordem 15.

(c) Classifique os grupos de ordem 30.

8. Seja G um grupo finito de ordem $n = p^a q^b$, onde p e q são números primos distintos. Sejam P e Q um p-subgrupo e um q-subgrupo de Sylow de G, respectivamente. Assuma que P e Q são normais em G.

(a) Mostre que a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon P \times Q & \to & G \\ (x, y) & \to & xy \end{array}$$

é uma bijeção. (Os primeiros exercícios da Lista 2 podem ajudar.)

(b) Mostre que se $x \in P$ e $y \in Q$, então $xyx^{-1}y^{-1} \in P \cap Q$ e logo $xy = yx$. Conclua que φ é um homomorfismo e, daí, que $G \cong P \times Q$ (note que isso ocorre se G é abeliano).

9. Generalizamos o exercício anterior. Seja G um grupo finito de ordem $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, onde os p_i's são primos distintos entre si e os a_i's são inteiros positivos. Seja P_i um p_i-subgrupo de Sylow de G e assuma que P_i é normal em G para cada $i = 1, \dots, k$.

(a) Mostre que a função

$$\begin{aligned} \varphi\colon P_1 \times \cdots \times P_k &\to G \\ (h_1, \ldots, h_k) &\mapsto h_1 \cdots h_k \end{aligned}$$

é uma bijeção.

(b) Mostre que se $h_i \in P_i$, $h_j \in P_j$, então $h_i h_j h_i^{-1} h_j^{-1} \in P_i \cap P_j$ e logo $h_i h_j = h_j h_i$. Conclua que φ é um homomorfismo e, daí, que $G \cong P_1 \times \cdots \times P_k$. (Em particular, se G é abeliano, então G é isomorfo ao produto direto dos seus subgrupos de Sylow).

(c) Como consequência de (b), mostre que vale a recíproca do teorema de Lagrange para grupos abelianos: se d divide a ordem de G, então existe um subgrupo H de G com $|H| = d$.